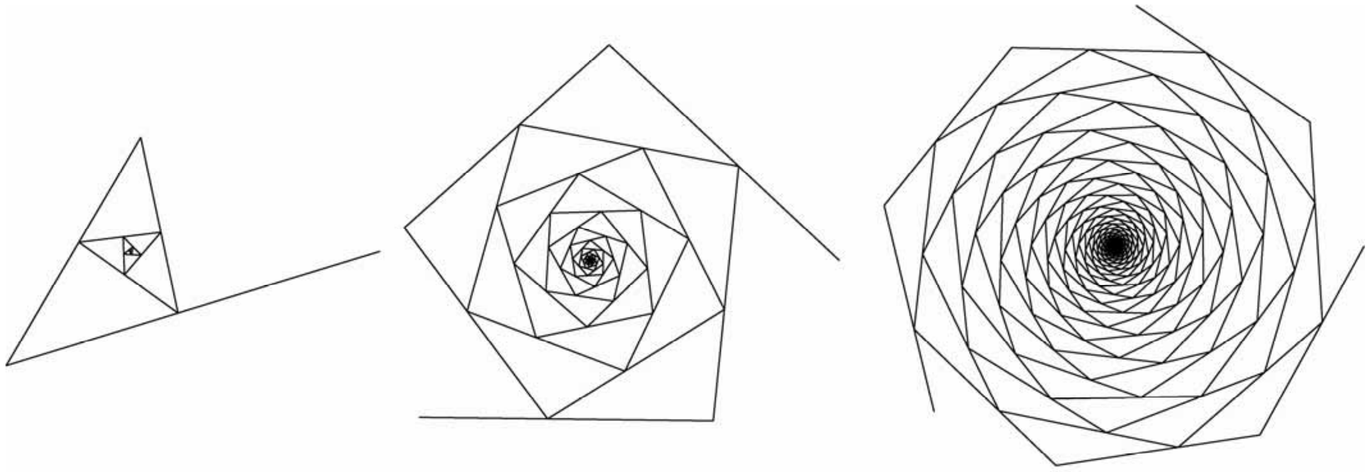
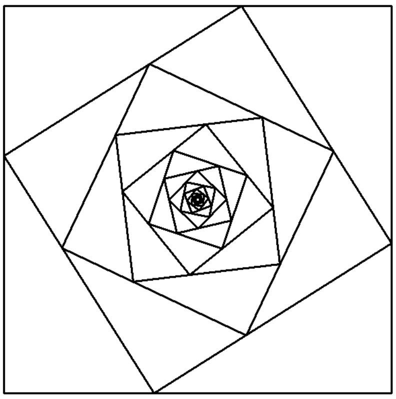
Real Tornado

1st November 2008

日詰　明男 Akio HIZUME



mod1　　mod2　　mod3

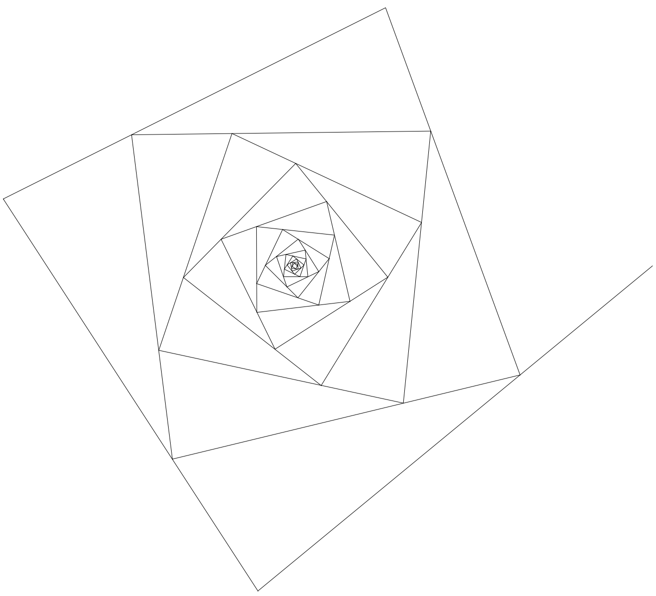


MANIFOLD #11（2005)「FIBONACCI TORNADO」および「相似三角形で構成される葉序パターン」の mod 1 から mod 13 までの図案を様々な場で発表してきたが、時々「これと似た図案を見たことがある」と言われることがあった。
調べてみると決まって左図に示すような、正多角形を内接させながら一定角度で縮小してゆくという図案であった。
違いは歴然としていると思うのだが、混同する人がたいへん多い。
「すべて相似形の三角で構成されるが、ひとつとして同じ面積がない」ところが FIBONACCI TORNADO の特徴であることに注目して欲しい。私は今のところ人工物で先行例を知らない。

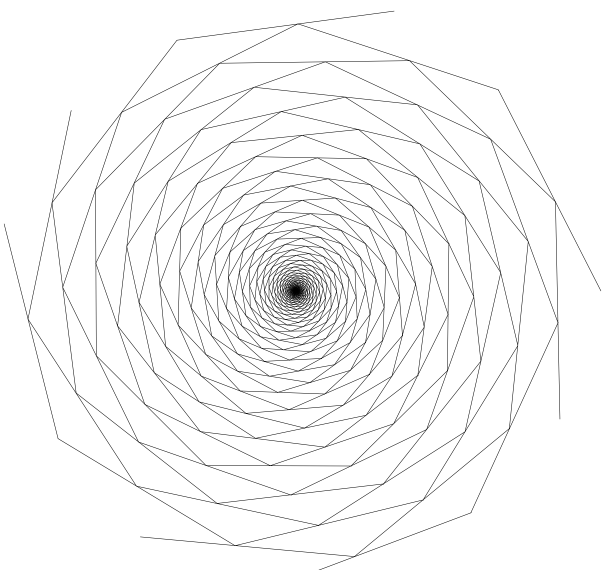
Real Tornado

ところで、FIBONACCI TORNADO はフィボナッチ数だけに限定されるのかどうかという未決の問題が残っていた。

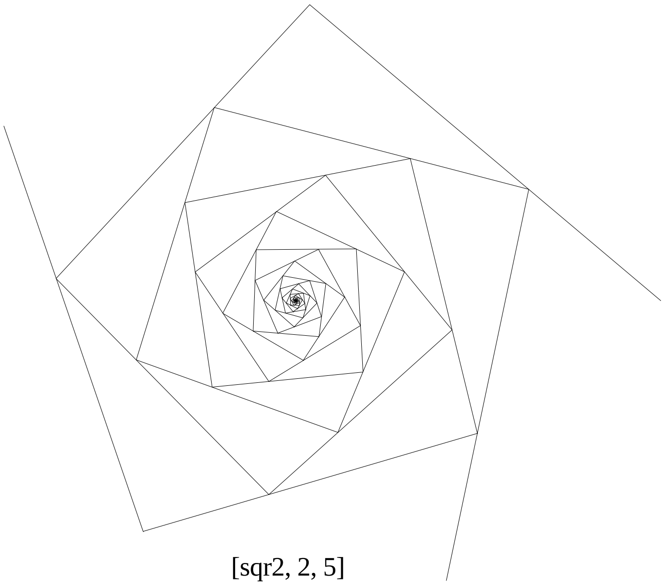
そこでまず挑戦したのが、$\sqrt{3}$ に基づく Tornado である。
FIBONACCI TORNADO 作図プログラムに少し手を加え、一般化することによって下図が得られた。



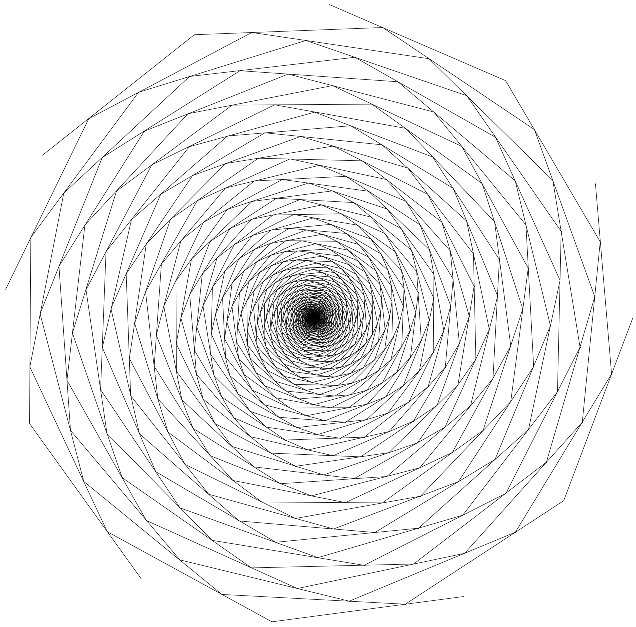
[sqr3, 3, 4]



[sqr3, 4, 11]



[sqr2, 2, 5]



[sqr2, 5, 12]

ついでに$\sqrt{2}$ トルネードを上に示す。

一般に、任意の実数に基づく Real Tornado を構成するためには、連分数展開に基づく近似分数の分母が鍵となる。すべての実数に可能なわけではなく、複数の近似分数を持つ必要がある。

いま実数 R が右図のような近似分数 Q_k/P_k と Q_{k+1}/P_{k+1} を持つとき、相似三角形だけで構成されるトルネードが描け、辺を共有する任意の 3 つの三角形は右図下の関係にある。直線の辿り方は 3 種類あり、

辺 a を辿る螺旋は$(P_{k+1} - P_k)$本

辺 b を辿る螺旋は P_k 本

辺 c を辿る螺旋は P_{k+1} 本

以上である。

$R= C_0+\cfrac{1}{}$	Q_0/P_0	**第 0 近似分数**
$C_1+\cfrac{1}{}$	Q_1/P_1	**第 1 近似分数**
$C_2+\cfrac{1}{}$	Q_2/P_2	**第 2 近似分数**
$C_3+\cfrac{1}{}$	Q_3/P_3	**第 3 近似分数**
・		
・		
$C_k+\cfrac{1}{}$	Q_k/P_k	**第 k 近似分数**
・		
・		

作成法

半径の長い順にしたがって頂点に番号 j をふる。
R を任意の実数とし、近似分数 Q_k/P_k と Q_{k+1}/P_{k+1} を持つとする。
j がひとつ増えるごとの縮小率を s とする。

$\delta=R*P_k*2\pi$

$\phi=R*P_{k+1}*2\pi$

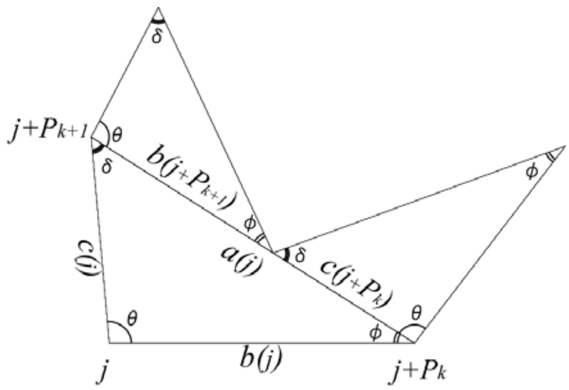
$a=1$ とすると b, c の比率は

$b=\sin\delta/\sin(\delta+\varphi)$

$c=\sin\varphi/\sin(\delta+\varphi)$

であらわされる。
右図の関係を満たすことから s は次の方程式を満たさなければならない。

$$b*s^{P_{k+1}}+c*s^{P_k}=1$$



s の値をニュートン法で解き､任意の j 番目の頂点座標は次式で決まる。
$j=0$ のときの半径を r とすると

$$x=r*s^j*\cos(R*j*2\pi)$$

$$y=r*s^j*\sin(R*j*2\pi)$$

あとは$(P_{k+1}-P_k)$を法として合同な番号 j を辿って直線を結べばよい。

結論

一般の Real Tornado は 3 つのパラメーターで決定される。

R　　：　*実数*

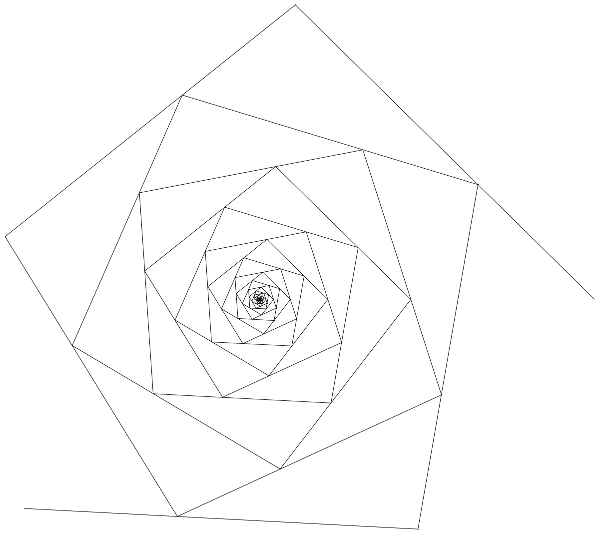
P_k　　：　*R の第 k 近似分数分母*

P_{k+1}　：　*R の第 $k+1$ 近似分数分母*

これを [R, P_k, P_{k+1}]のように表記しよう。
以下にいくつかのサンプルを掲げる。
Real Tornado は実数小数部の連分数構造を反映するひとつの表現である。

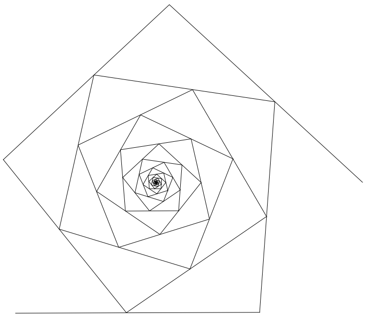
課題

高次方程式をニュートン法で解き、コンピューターで作図したわけだが、代数的に解けないものだろうか。
あるいは折紙等で再帰的に折る方法が存在するのでは？

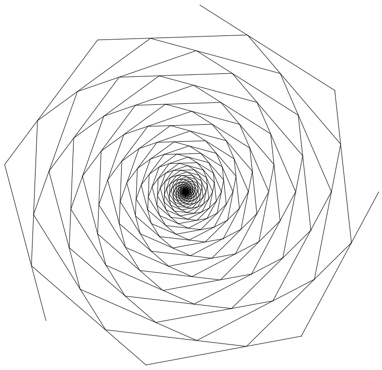


[8/13, 3, 5]

13 番ごとに周期性

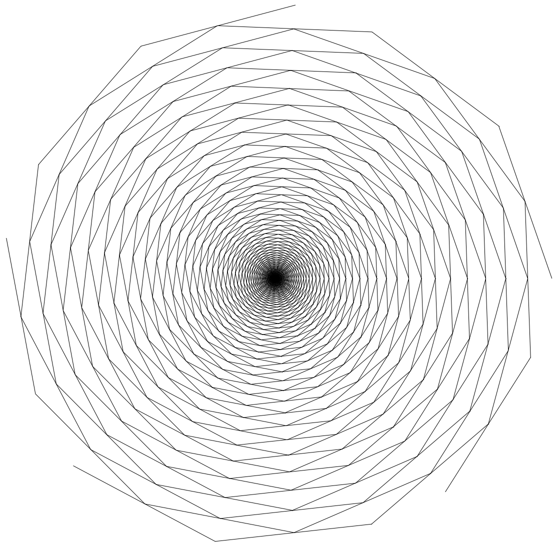


[13/21, 3, 5]



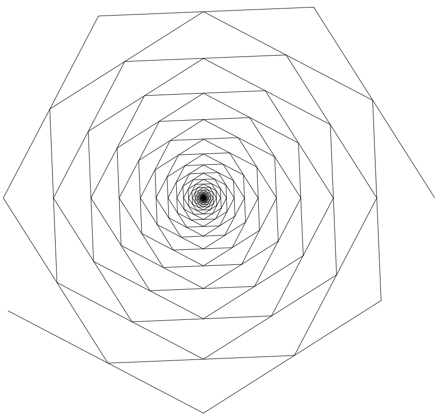
[13/21, 5, 8]

21 番ごとに周期性が現れるがフィボッチトルネード mod2, mod3 とほとんど見分けがつかない。

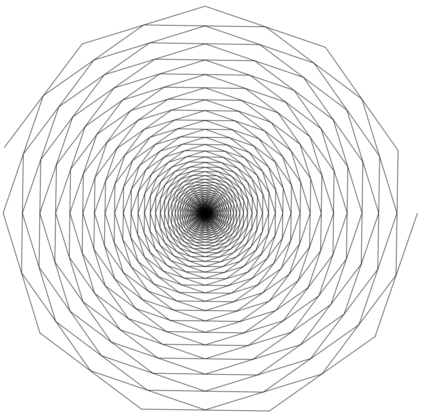


[13/21, 8, 13]

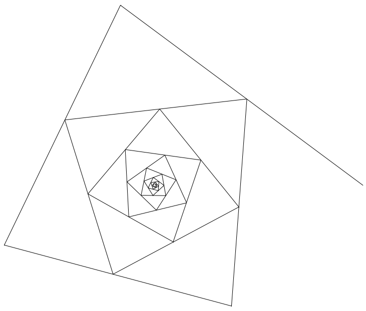
ようやく 21 番ごとの周期性が顕著に見える。



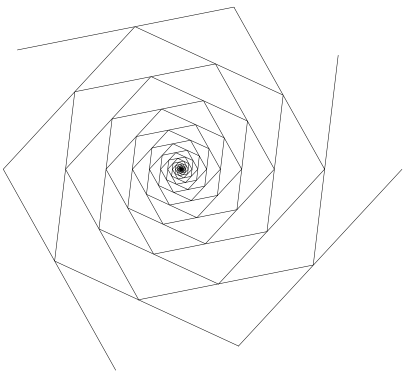
[7/12, 5, 7]



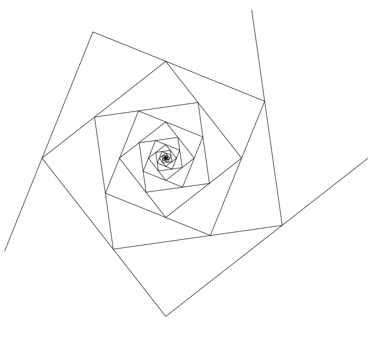
[1.45, 9, 11]



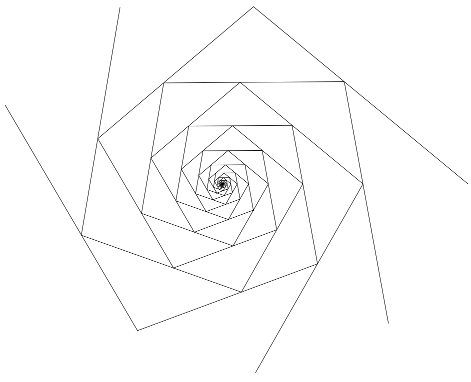
[0.28, 3, 4]



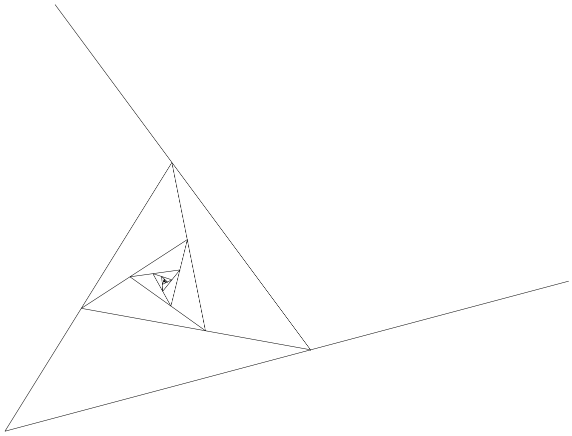
[1.7, 3, 7]



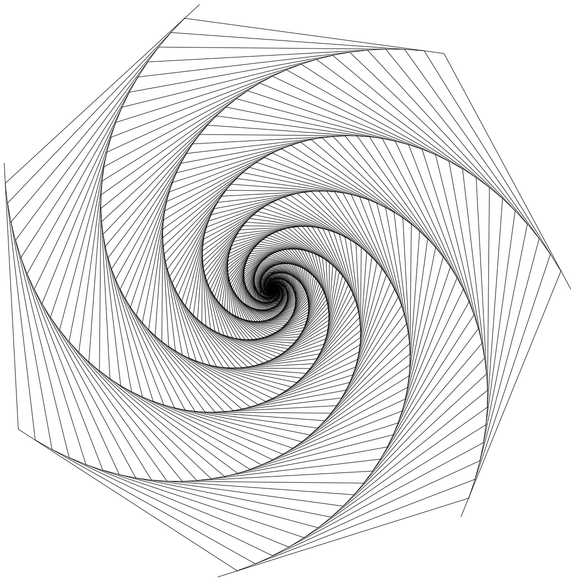
[7/12, 2, 5]



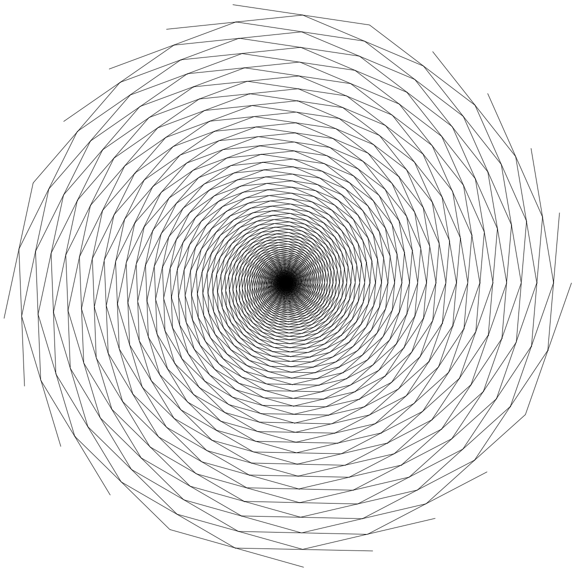
[13/9, 2, 7]



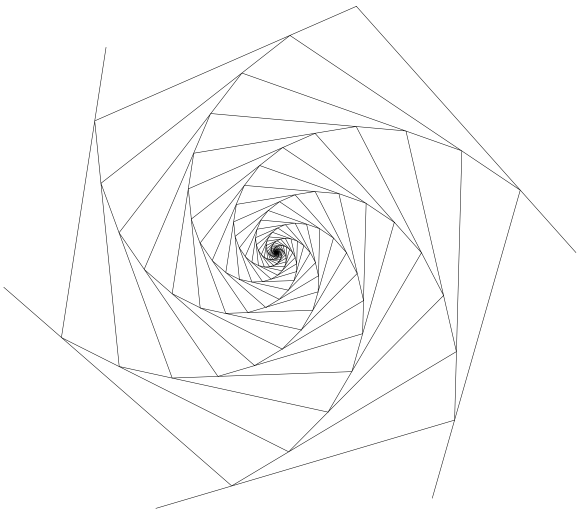
[0.31, 1, 3]



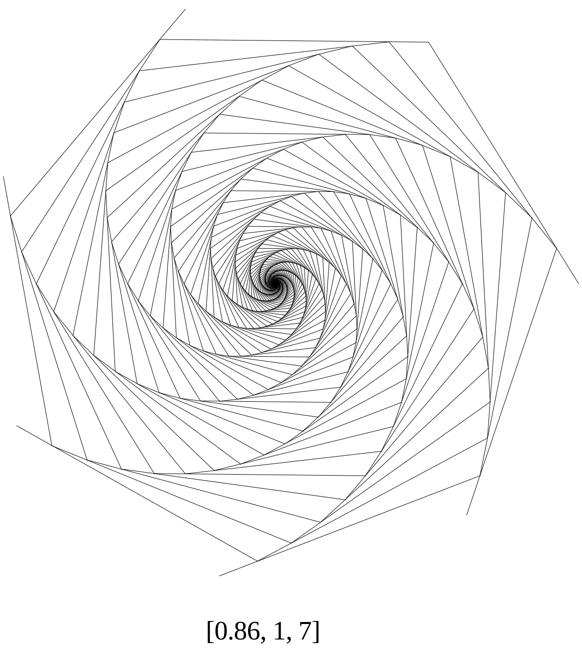
[0.43, 2, 7]



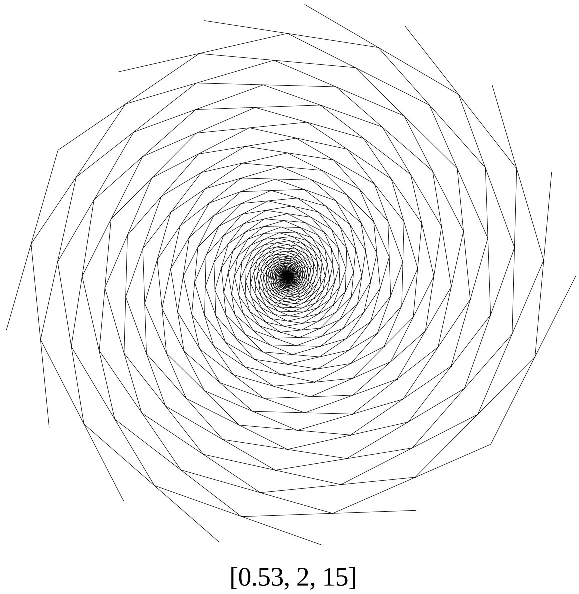
[1.76, 4, 21]



[0.84, 1, 6]



[0.86, 1, 7]



[0.53, 2, 15]