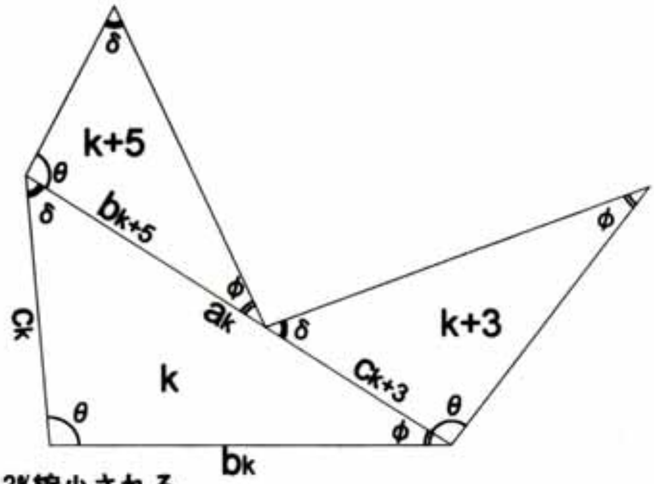
相似三角形で構成される葉序パターン

©2005 日詰　明男　Akio HIZUME
http://homepage1.nifty.com/starcage/

FIBONACCI TORNADOを設計するために以下の計算をした。
相似三角形のみでmod2（二重螺旋）のひまわりパターンを作ることを考える。
左の漸化図において、次がことが成り立つ。τを黄金比$(1+\sqrt{5})/2$として、



$\cos\delta=\cos(3*2\pi/\tau)$
$\cos\phi=\cos(5*2\pi/\tau)$

a=1のとき
$b=\sin\delta/\sin(\delta+\phi)=0.7966510959\cdots$
$c=\sin\phi/\sin(\delta+\phi)=0.5387910616\cdots$

$a_{k+1}/a_k=b_{k+1}/b_k=c_{k+1}/c_k$であらわされる相似比sは次式を満たす。

$bs^5+cs^3=a$

この５次方程式の実根をニュートン法で求めると
$s=0.9328178721\cdots$
である。つまり相似三角形は番号がひとつ上がるごとに約93.3%縮小される。

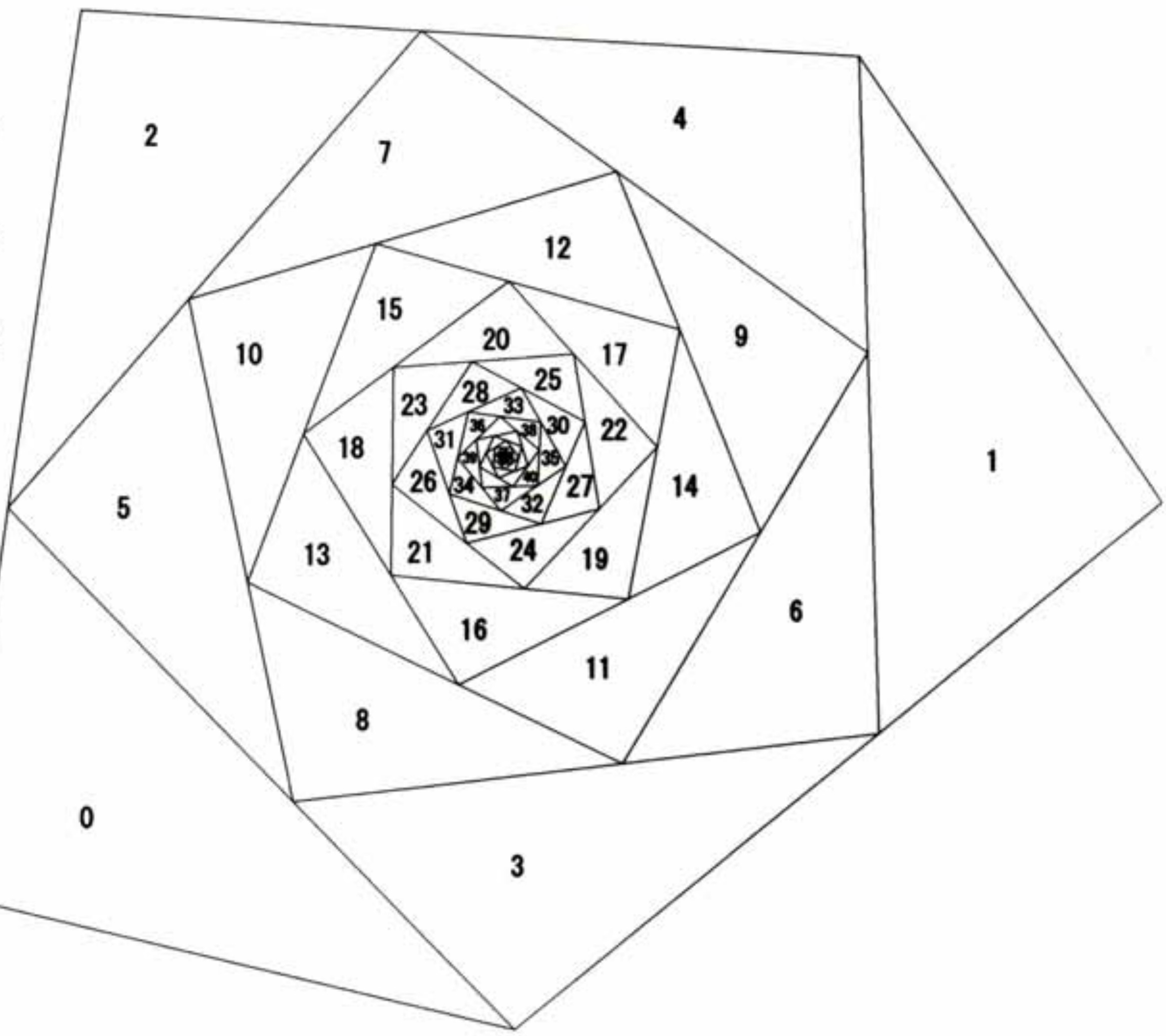
すべての三角形の頂点が乗る一本の対数螺旋を決定することができる。
それを極方程式$r=G^{\omega}$であらわすものとする。
条件を満たす対数螺旋は右巻き、左巻きの２種類ある。
$\omega=2\pi(\tau-1)$のとき、あるいはその対偶$\omega=2\pi(2-\tau)$のとき、r=sとなるGを求めればよい。

$G=e^{(\log(s)/\omega)}$なので

$\omega=2\pi(\tau-1)$の場合
$G=0.9822502411\cdots$

$\omega=2\pi(2-\tau)$の場合
$G'=0.9714381720\cdots$

以上によって左図が得られる。



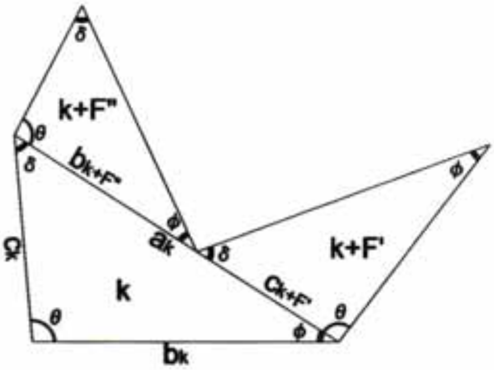
これを一般のフィボナッチ数を法として合同な螺旋に一般化しよう。
Fを任意のフィボナッチ数とする。次のフィボナッチ数をF'、次の次のフィボナッチ数をF"とする。
mod Fの螺旋（F重螺旋）を作る相似三角形の形と縮小率は前頁において以下の変更をするだけでよい。

$\cos\delta = \cos(F' * 2\pi/\tau)$

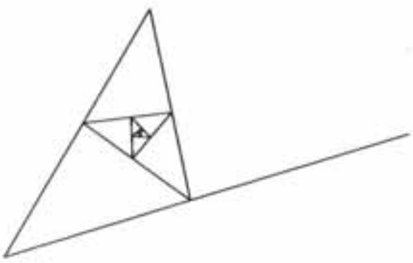
$\cos\phi = \cos(F'' * 2\pi/\tau)$

$bs^{F''} + cs^{F'} = a$

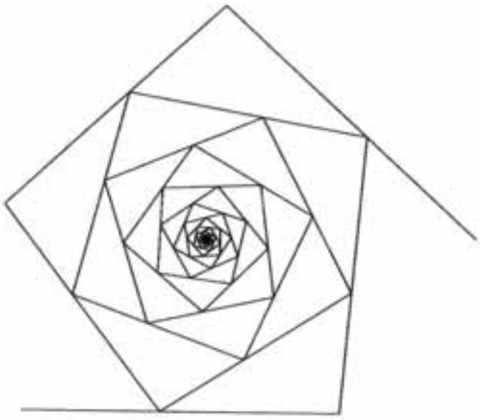
mod1からmod8までの各定数と出力図を以下に示す。



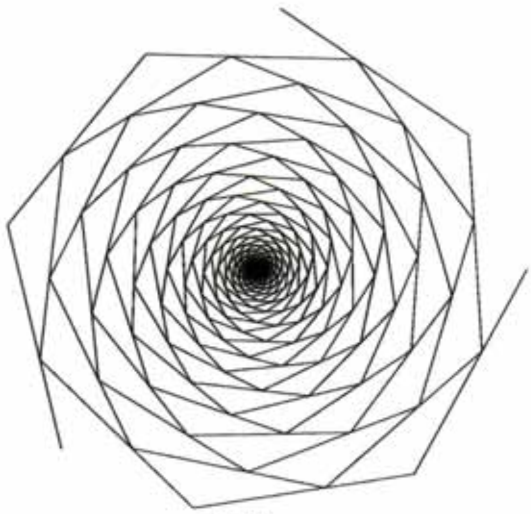
modF	S	A	B	C	δ°	φ°	θ°	G	G'
mod1	0.67808666	1	1.474737756	1.17485145	84.98447189	52.52329217	42.49223594	0.904800609	0.850552431
mod2	0.932817872	1	0.796651096	0.538791061	52.52329217	32.46117972	95.01552811	0.982250241	0.971438172
mod3	0.984986701	1	0.67631999	0.432255931	32.46117972	20.06211245	127.4767078	0.996112065	0.993716751
mod5	0.996532531	1	0.639129314	0.400052553	20.06211245	12.39906727	147.5388203	0.999105913	0.998553735
mod8	0.999188781	1	0.625933664	0.388722953	12.39906727	7.663045185	159.9378875	0.999791033	0.999661907



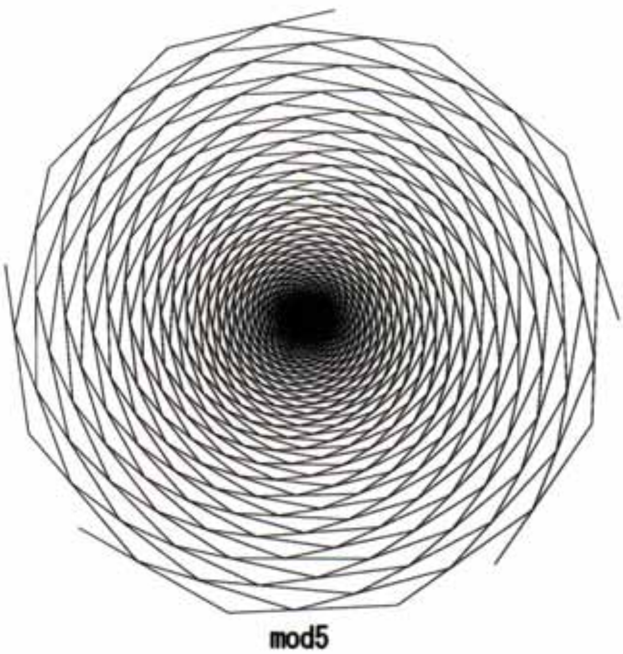
mod1



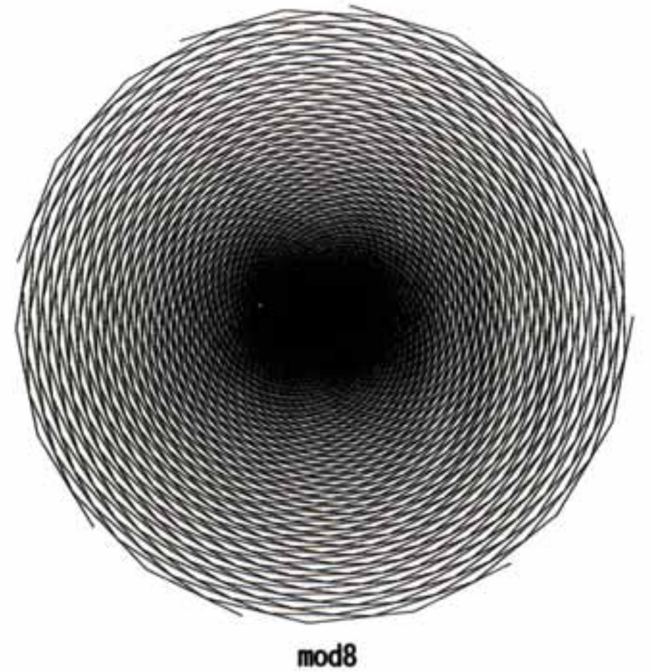
mod2



mod3



mod5



mod8

参考文献

(1) 東川和夫 "ひまわりのたね", 数学セミナー, 7, 1985.
(2) 日詰明男 "生命と建築", 1990.
(4) 日詰明男 "Sunflower Tower", MANIFOLD #07, 2003.
(5) 日詰明男 "FIBONACCI TORNADO", MANIFOLD #11, 2005.