

# 葉序のおよび非葉序的な三角形の 相似タイリングと折り紙

須志田隆道 (龍谷大学) 日詰明男 (龍谷大学) 山岸義和 (龍谷大学)

2010年12月 応用数学合同研究集会

Farey 数列 自然数  $n$  に対して、位数  $n$  の Farey 数列とは、0 以上 1 以下で分母が  $n$  以下の分数を大小の順に並べたものである。たとえば位数 5 の Farey 数列は

$$\frac{0}{1} \frac{1}{5} \frac{1}{4} \frac{1}{3} \frac{2}{5} \frac{1}{2} \frac{3}{5} \frac{2}{3} \frac{3}{4} \frac{4}{5} \frac{1}{1}$$

である。

四角形相似タイリング 互いに素な二つの自然数  $m, n$  に対して、位数  $M = \max(m, n)$  の Farey 数列を考えると、この中に隣り合う分数の対  $a/m < b/n$  がある。複素数  $\zeta = re^{\sqrt{-1}\theta} \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{R}$  を、 $\theta/2\pi$  が  $(a+b)/(m+n)$  に近いように選ぶと、 $a/m < \theta/2\pi < b/n$  であって、

$$n \arg(\zeta^m) - m \arg(\zeta^n) = 2\pi, \quad (1)$$

$$\operatorname{Im}\zeta^m > 0 > \operatorname{Im}\zeta^n \quad (2)$$

が成立つ。ただし、複素数  $z$  の偏角はつねに  $-\pi < \arg z \leq \pi$  の範囲で考える。線分  $\langle \zeta^j, \zeta^{j+m} \rangle$  および  $\langle \zeta^j, \zeta^{j+n} \rangle$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ) を引くと、相似四角形のタイリングができる。図 1 は、 $\arg(\zeta) = 2\pi\tau$ ,  $\tau = (\sqrt{5}-1)/2$ ,  $(m, n) = (8, 13)$  の場合で、ひまわりの種の葉序などで一般的に見られる模様である ([1])。  $\tau$  は黄金比であり、8 や 13 はフィボナッチ数列

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

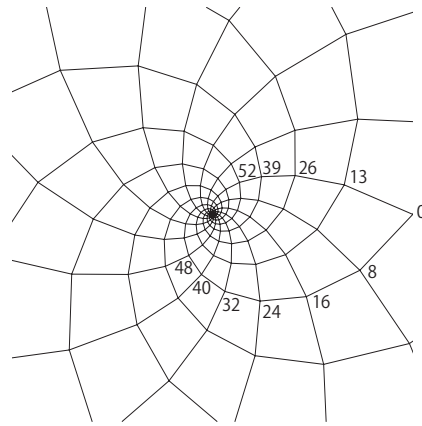


図 1 四角形の相似タイリング

に属する。 $a/m, b/n$  は  $\theta/2\pi$  を連分数展開したときの近似分数である。(1), (2) をみたく相似タイリングを葉序のタイリングとよぶ。

三角形相似タイリング 四角形タイリングの  $r = |\zeta|$  を調整して

$$\begin{aligned} & \sin(\pi - (m+n)\theta) \\ &= r^n \sin m\theta + r^m \sin(-n\theta) \quad (3) \end{aligned}$$

が成立つようにすると、正弦定理により、三角形の相似タイリングが得られる ([2, 3])。図 2 は  $\theta = 2\pi\tau$ ,  $(m, n) = (5, 3)$  の場合である。

与えられた三角形からタイリングを作る三角形相似タイリングにおいて、 $\arg(\zeta^m)$ ,  $\arg(\zeta^n)$  が三角形の 2 つの角の角度を表すことは容易にわかる。初等幾何学でいえば、三角形の 3 頂点と原点が同一円周上にあるという

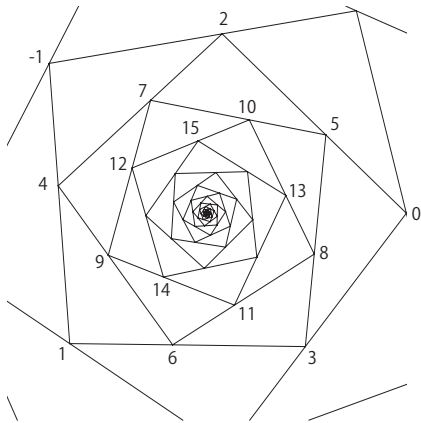


図2 三角形の相似タイリング

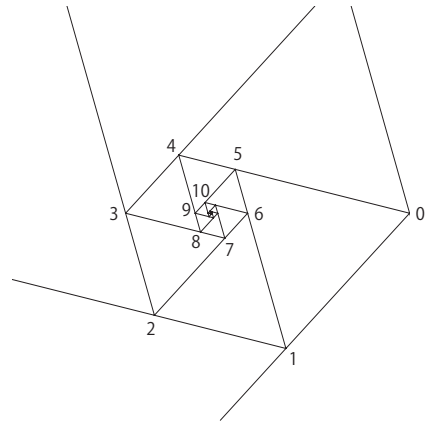


図4 正三角形の相似タイリング

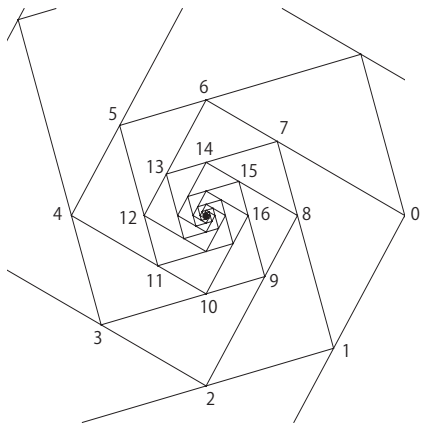


図3 直角二等辺三角形の相似タイリング

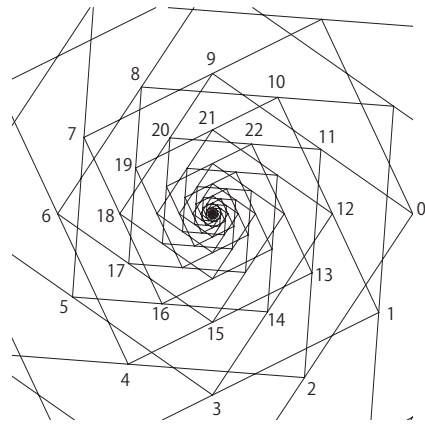


図5 2重タイリング

ことである。逆に三角形の角度  $\alpha, \beta$  が与えられたときに、 $\alpha = \arg(\zeta^m), \beta = \arg(\zeta^n), (1), (2), (3)$  を満たす  $\zeta, m, n$  が存在すれば、その三角形で相似タイリングが作れる。図3は直角二等辺三角形、図4は正三角形の場合である。

多重タイリング 一般の角度の三角形で相似タイリングを作ろうとすると、局所的には作れるが、原点のまわりを一周したときにもとのタイリングとぴったり合うとは限らない。これは頂点の集合が2元生成  $V = \{\zeta^j \eta^k : j, k \in \mathbb{Z}\}$  となるからである。一元生成  $V = \{\zeta^j : j \in \mathbb{Z}\}$  であっても

$$n \arg(\zeta^m) - m \arg(\zeta^n) = 2\pi v, |v| > 1 \quad (4)$$

のときには、平面を  $|v|$  重に被覆するタイリングとなる。図5は  $v = 2$  の場合である。

非葉序的タイリング 四角形タイリングで  $\theta = \arg \zeta$  を連続的に動かすとき、タイリングは組み合わせの性質を維持して連続的に変形する。

$$(\operatorname{Im} \zeta^m)(\operatorname{Im} \zeta^n) > 0$$

となったとき、これを非葉序的タイリングとよぶ。  $r = |\zeta|$  が

$$\begin{aligned} \sin(\pi - (m+n)\theta) \\ = r^n \sin m\theta + r^{-m} \sin n\theta \end{aligned}$$

をみれば、非葉序的な三角形タイリングである。位相的には、葉序的な三角形タイリングよ

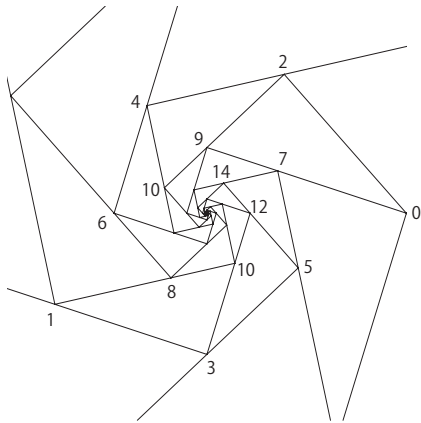


図6 非葉序的タイリング

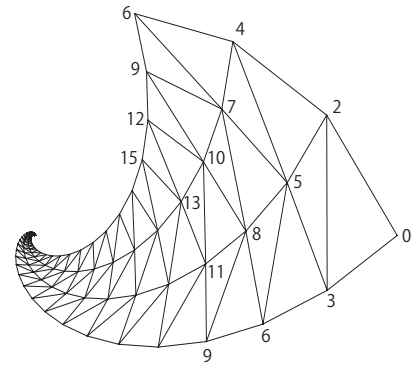


図7 三角形タイリング(図2)の折り紙展開図

りも非葉序的な三角形タイリングのほうが、以下の意味で多数派を占める。

定理 1 多重度  $v$  を固定するとき、非葉序的な三角形タイリングの生成元  $\zeta$  全体の集合  $Q_v$  は  $\mathbb{D}$  の中で稠密 (dense) である。葉序的な三角形タイリングの生成元  $\zeta$  全体の集合  $P_v$  は  $\mathbb{D}$  の中で稠密でない。和集合  $\bigcup_v P_v$  は  $\mathbb{D}$  の稠密部分集合である。

図6は、角度  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  の三角形による非葉序的タイリングである。

折り紙展開図 三角形相似タイリングは、少なくとも局所的には折り紙で製作することができる ([2, 9])。回転対称性をもつタイリングの場合は「ねじれ多重塔」[7, 8] とよばれる。図7は、図2の折り紙展開図である。四角形の対角線を谷折り、その他をすべて山折りにする。

折り紙展開図が一枚の紙におさまるか、という問題を、 $(m, n) = (5, 3), 3/5 < \theta/2\pi < 2/3$  の場合で考える。図8は  $\theta/2\pi$  が  $3/5$  に近い場合、図9は  $\theta/2\pi$  が  $2/3$  に近い場合で、組み合わせ的には互いに同型なタイリングである。これらの折り紙展開図が図10, 11である。どちらも、理論上は一枚の紙で作れそうである。

一方、図13は図12の折り紙展開図である。

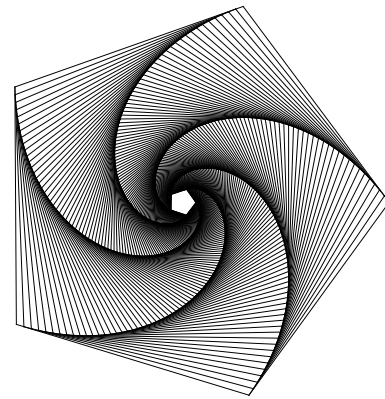


図8  $(m, n) = (5, 3), \theta = 2\pi(3/5 + \epsilon)$

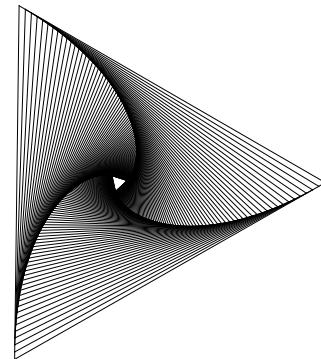


図9  $(m, n) = (5, 3), \theta = 2\pi(2/3 - \epsilon)$

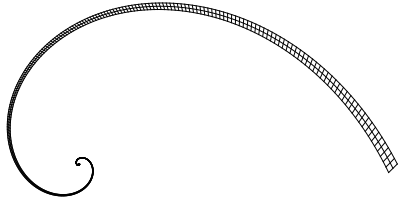


図 10 図 8 の折り紙展開図

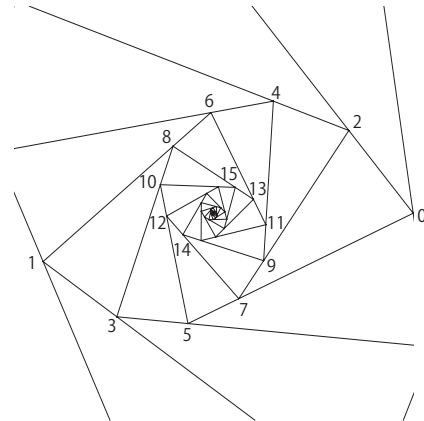


図 12  $(m, n) = (7, 2)$ ,  $\theta = 2\pi(0.542)$

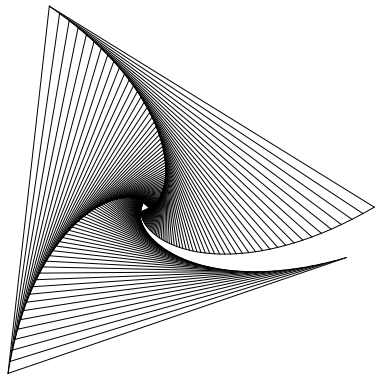


図 11 図 9 の折り紙展開図

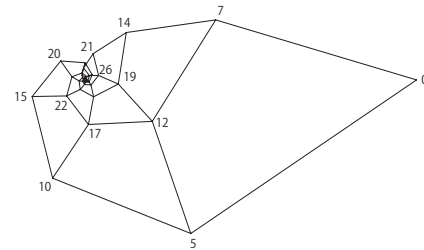


図 13 図 12 の折り紙展開図

この場合は折り紙展開図が極限点のまわりを一周以上まわるので、一枚の紙では足りない。

### 参考文献

- [1] R. V. Jean, Phyllotaxis, A Systemic Study in Plant Morphogenesis, Cambridge university press, 1994.
- [2] 日詰明男, Fibonacci Tornado, MANIFOLD 11, 2005, 6-11.
- [3] A. Hizume, Fibonacci Tornado, in: Proceedings of the 11th Bridges Conference, 2008, 485-486.
- [4] 日詰明男, Real Tornado, MANIFOLD 17, 2008, 8-11.

- [5] Akio Hizume, Yoshikazu Yamagishi, Real Tornado, MANIFOLD 19, 2009, 10-20.
- [6] A. Hizume and Y. Yamagishi, Real Tornado, in: Bridges Banff, Proceedings of The 12th Annual Bridges Conference, 2009, 239-242.
- [7] 布施知子, ねじれ多重塔, MANIFOLD 5, 2002, 7-10.
- [8] 布施知子, 続: ねじれ多重塔, MANIFOLD 12, 2006, 2-27.
- [9] 須志田隆道, Fibonacci Tornado の折り紙展開図, MANIFOLD 19, 2009, 10-20.