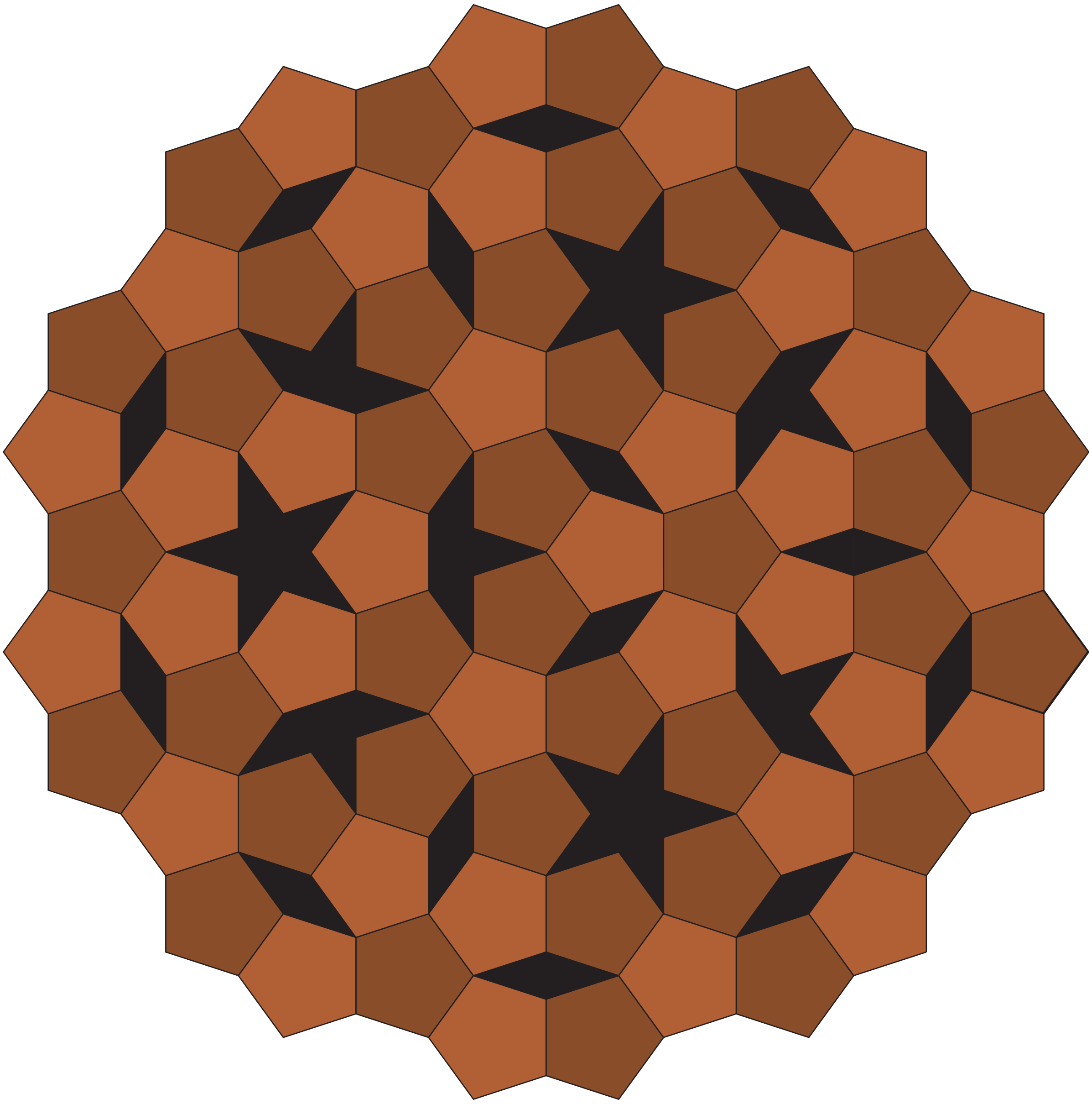
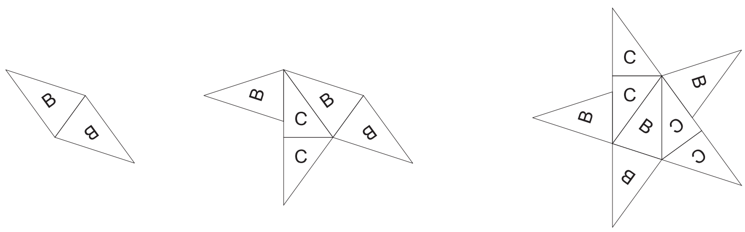
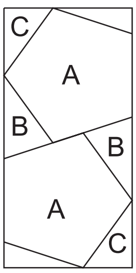
M A N I F O L D

#19







A明=35 A暗=38 B=57 C=11 C裏=11

Oct. 2009

幾何学構造研究育成基金

Geometric Structure Foundation

幾何学構造研究育成基金
Geometric Structure Foundation
MANIFESTO

幾何学構造の研究は、いわば来るべき論理、来るべき科学、来るべき芸術の下部構造（インフラストラクチャー）を開拓することである。

ひとつの新しい幾何学構造は、100 年単位で次の時代の文化を支えるであろう。この分野における発見がある限り、社会の活性が失われることはない。

歴史上、この学問における重要な発見は、大規模な研究組織よりもむしろダ・ビンチ、デューラー、ケプラーなど、個人研究家やアーティストの独創によるところが多かった。普遍的な法則は常に個人の独創によって発見される。この意味において「普遍」と「個性」は全く矛盾しない。

今日も、限られた環境で地道な研究を続ける多くの個人研究家が存在し、日本を始め世界各地でめざましい成果を上げている。

しかし、その重要性とは裏腹に、今日この知的業績を支援育成する法的体制はあまりにも遅れていると言わざるをえない。新しい幾何学構造を発見することはきわめて困難な精神活動であるにもかかわらず、一旦発見されてしまえば他人は容易にコピー出来てしまう。この明快さが仇となって発見者の業績はとかく軽視されがちである。

同時に現代は「個人」が社会的に弱い立場に立たされる時代であり、研究家は皆それぞれの厳しい現実と戦いながら、ぎりぎりのところでイデアを追究している。

もしもこのまま個人研究家の独創を正当に評価する仕組みが整備されないならば、いずれ個人研究家は確実に減少し、社会には何も新しいことが起こり得ない状況に閉塞し、凡庸さの熱平衡状態への道をたどるだろう。

そこで未来に向けて、少壮の個人研究家を相互支援・保護および、研究家同士の交流を一挙に実現すべく「幾何学構造研究育成基金」を創設した。

「幾何学構造研究育成基金」で積み立てられた資金は、たとえば今後、研究家の作品が何らかの被害にあったとき、ただちに弁護費用に役立てられる。これは個人研究家のための保険機構として働くだろう。

通常の活動としては、年に二回の会報「MANIFOLD」を出版し、会員に配布する。それは会計報告と会員名簿を兼ねる。

会報は会員からのオリジナル論文投稿があればそれらを無審査で掲載するものとし、同時にそれをプライオリティーを保証する記録に役立てようとするものである。これは特許制度や学術論文作成に代わる、より簡易なプライオリティー確保と節度ある公開のシステムとなるだろう。

これを機に、いままで孤立無援の活動を続けていた個人幾何学研究家はもちろんのこと、主旨に賛同される一般の方々からも参加と寄付を集められれば幸いである。

ルール

会員の２名の推薦をもって入会できる。

当面、年会費は2,000 円とする。これに年に２冊の会報「MANIFOLD」の送料は含まれる。

会費納入額に上限はなく、出資額に見合った期間、機関誌は送り続けられる。

極端な話、100 年分支払っていただいたとすると、過剰分は実質的に「寄付」として役立てられる。

保険として集められた資金は指定口座にプールされ、万が一事件が起こった場合の弁護士費用としてのみ使われる。

会計報告兼機関誌「MANIFOLD」は毎年２回（１月末日と７月末日）発行する。

会費納入の時点から機関誌は郵送される。

郵便振替

口座番号

00570－4－44362

口座名称

幾何学構造研究育成基金

会費が未納の時点で冊子の送付が自動停止され退会と見なされる。

退会者は、任意の時点で会費の振り込みと同時に再入会できる。新たに推薦を必要としない。

投稿は規格の A4 に著者自身が版下原稿を作成し、基金宛に郵送する。

投稿者は自分の投稿ページ数に見合った印刷費を負担する。１ページあたりの印刷費は 10 円×会員数である。10 円の内 5 円は保険として基金に積み立てられる。

カラー原稿の場合１ページあたりの印刷費は 55 円×会員数である。55 円のうち 5 円は保険である。

送付された原稿は無審査で機械的に印刷され、全会員に一冊ずつ郵送される。

内容は原則として完全オリジナル原稿とする。

引用箇所がある場合はその都度明記すること。

会員は機関誌の内容に対して守秘義務を持つ。

記事の内容の全責任は著者本人が持つ。

郵送された原稿の消印日付もしくは受け取り日付が、機関誌のそれぞれの投稿記事冒頭に明記される。

原稿は送られてきた封筒とともに基金事務局に無期限に保管される。
その原稿がその日時に送付されたという事実を、著者の要請があれば、当基金が存続する限り全身で保証するものである。

会員の著作権を侵害する事件が発生した場合、その時点で会員である者に対してのみ、当基金は弁護士費用を貸与する。貸与される弁護対象の著作権は機関誌への投稿内容でなければならない。事件の発生はすみやかに全会員に伝えられ、貸与金額が不足の場合は募金活動も行う。

以前会員であった者に対しては、機関誌への投稿内容が侵害を受けたときのみ、当基金はその投稿事実に基づいて証言、資料提出などの協力を惜しまないものである。しかし事件が発生した時点で会員でなければ弁護費用の貸与は行わない。

裁判等で勝利し賠償が得られた場合、貸与分は当基金に返還するものとする。

この基金の位置づけ

この基金が発行する機関誌の特徴は、投稿された研究が、信用のおける研究家の間だけで発表され、しかし公的には守秘義務によって保護されている点である。
研究のプライオリティ確保の客観的な証拠として役立てられると同時に、万が一事件が起こった場合は、その弁護活動も基金や会員が協力するというものである。

個人研究家の連携による当基金の存在が、日本著作権協会のように知れわたれば、有力な剽窃抑止力になることが期待される。

「機関誌に掲載された内容に対して守秘義務がある」ということは、研究家はこの機関誌に発表後であっても日本で特許出願できることを意味する。（諸外国では特に守秘義務で押さえられていなくても、発明者本人であれば発表後も出願できる場合が多い。そうあるべきである。）

法廷では一般に「事件化する以前に詳細につけられた日記」は有力な証拠となる。

したがって、この基金が発行する機関誌は「組織的な日記」として十分成立するだろう。そのためにも、この機関誌の定期的な発行を徹底するつもりである。
いわばこの機関誌は作家や研究者らによって共有された C.c.（カーボンコピー）であり「MANIFOLD（手紙の写し）」なのである。

いずれにせよ、機関誌の発行が順風満帆に継続し、事件など起こらないことが最善であることは言うまでもないことである。

M A N I F O L D

マニフォールド

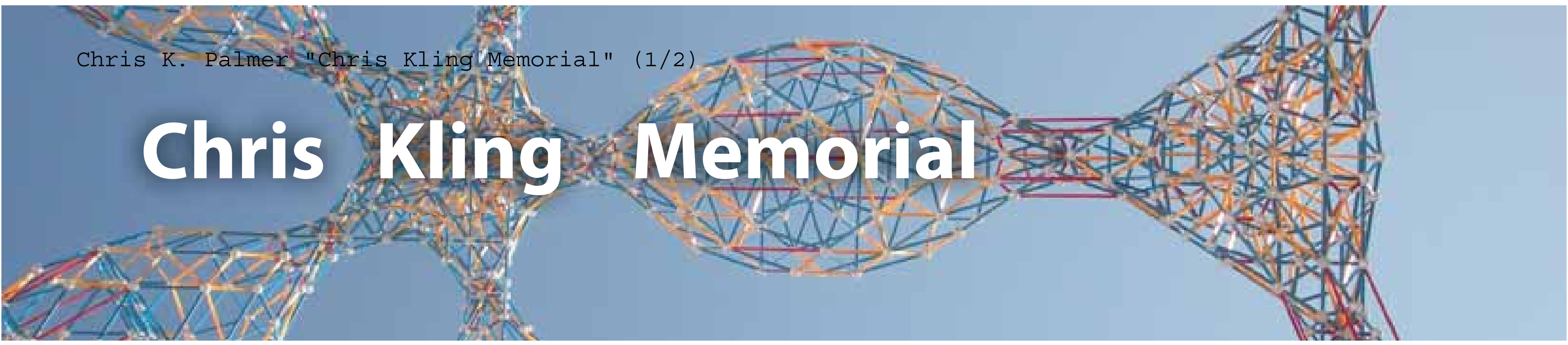
#19

発行：幾何学構造研究育成基金

Published by Geometric Structure Foundation

MANIFOLD: 多重に折り畳まれたもの／多様体／多様性／多岐管／
同時にいくつもの機能を果たすもの／手紙の写し

C O N T E N T S



Chris Kling Memorial

The associates of Chris Kling at the Bridges Art and Math Banff Canada 2009.

From upper left Paul Hildebrandt, Chris K. Palmer, Mike Stranahan, George Hart and Walt van Ballegooijen toast to the memory of one of Chris Kling's dream realized successfully.

http://www.flickr.com/photos/zometool/
http://www.facebook.com/pages/Zometool/130294201808
http://www.flickr.com/photos/zometool/sets/72157621780116435/
Immersive Panorama by David Swart
http://www.flickr.com/photos/dmswart/
http://fieldofview.com/flickr/?page=photos/dmswart/3777244514

1500 fingers, from ages 7 to 70, built a massive sculptural tribute to the late architectural visionary, Jean Christophe Kling, at the Renaissance Bridges conference in Banff, Canada this July.

5 meters in diameter and assembled from approximately 50,000 tinkertoy-like parts, the gossamer model is the largest of its type ever attempted.

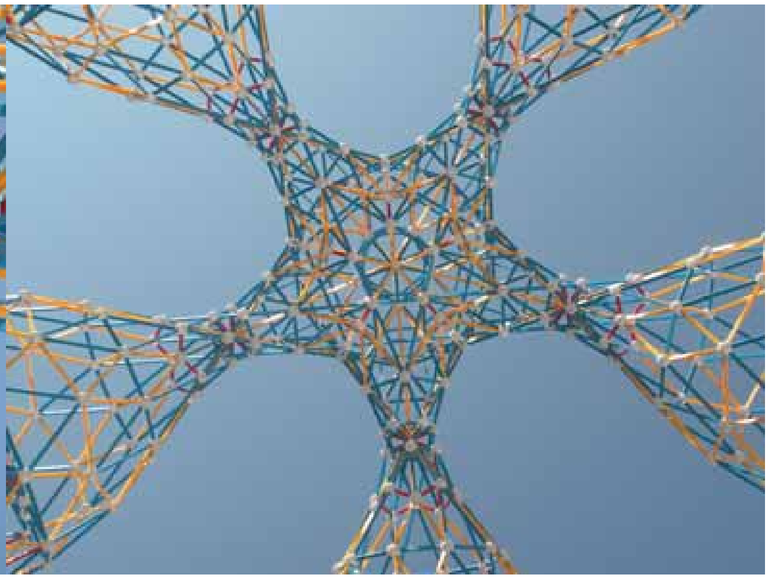
Kling dedicated his life to adapting "golden" geometry, which underlies the structure of universe, to architecture forms. This never-before-realized design came from a prolific portfolio of architectural forms Kling left after his untimely death in March of this year. The Banff installation was the first organized effort of his associates, many of whom are attended the Bridges conference, to carry his work forward.

Golden geometry is a universal language bridging art and mathematics, that transcends cultural, political, economic and geographic boundaries. 150 mathematicians and artists from all over the world (and several of their children) assembled the small plastic Zometool components into superstructures that became the final sculpture on Wednesday. The work took some 250 person-hours, performed during breaks between presenting and attending talks such as "Symmetry and Transformation in the Musical Plane" and "The Unique 11-Pointed Star Polygon of the Topkapi Scroll."

Although it was built entirely from points and straight lines (i.e., nodes and struts) the model looks like a 3-dimensional "spirograph" drawing, with organic curves that mimic life forms. The underlying structure is derived from a shadow of a 6-dimensional cube also known as a Triacontahedron with rhombicosadodecahedron nodes and polar zonahedra struts.

The structure stood from the late afternoon of its completion when we toasted to Chris's memory then over night till about one the next day when a gust of wind knocked it down.

Chris Kling Memorial



The details were beautiful!

The shadows were beautiful!

The mountains were beautiful!

This beautiful dream was fragile but more of Chris Kling's dreams will live again!

Chris Kling さん追悼

2009 年 4 月、Chris Palmer さんから悲しい知らせが届いた。MANIFOLD 会員である Chris Kling さんが急逝された。

私は 2002 年にアメリカのメリーランド州で開かれた Bridges 国際会議に、柳瀬順一君と参加し、Chris Kling さんと出会った。彼はスイス出身で私と同世代である。
彼はアメリカ・コロラド州 Boulder に住み、ゾムツールの開発者の Marc Pelletier 氏とともにさまざまな開発を手がけていた。黄金比や五回対称、準周期パターンを次世代の規格にしようという点で、我々は意気投合したのである。
Bridges 国際会議では私の作品「Bamboo Pleiades Lamp」と、当時彼が開発したばかりの最高企業秘密「菱形 30 面体のアルミ製ジョイント」一個を等価交換した。

帰国後、自宅に何度か国際電話がかかり、電話代が心配になるほどの長電話をした。
電話のむこうで彼は、ペンローズ・タイルに従った建築設計案「Goetheanum 3（1990）」を私のホームページで見てショックを受けたという。彼はゾムツールをヴァーチャル空間で奔放にデザインできる CAD ソフトウェア「Aurodyn」（http://www.aurodyn.com/）を開発中で、Goetheanum 3 のような建築設計にこそ向いたソフトウェアだという。
そしてこの図面一式を売って欲しいという。私は A1 大の全図面を青焼きし、時節柄、クリスマス・プレゼントとして贈ることにした。後日無事受け取りの電話があり、全図面が手描きであることにとても驚かれたようでもあった。
五回対称の建築や都市を作ることは我々共通の夢であり、類は友を呼ぶというべきであろうか。
思うに人間は、五回対称の空間に住みたいと思う者とそれを拒絶する者とにはっきり分かれるようである。
前者はまだまだ少数派であろう。

2006 年にアトランタで開かれた 7th Gathering for Martin Gardner (G4G7)は忘れられない思い出だ。私たちは 4 年ぶりに再会した。会議の合間を利用して、Chris Kling さんの宿に行き、開発途中の Aurodyn で Goetheanum 3 の作図を試ることにした。数時間その CAD のお手並みを拝見したところ、確かに正 12・20 面体的な規格の設計には抜群の操作性であることは了解できたが、問題点もいくつか見えてきた。トラス構造を設計する限りでは不足ないのだが、コンクリート造に類する一定の厚さを持った躯体の設計にはまだ十分対応できてないようであった。その後の改良のヒントになったのではないかと思う。
G4G7 最終日、日曜日で休業だらけのアトランタ市街を、ペンローズ氏と私が昼食をとるべく彷徨っていると、運よく Chris Kling さんともう一人のクリス、Chris Palmer さんと出くわして、かろうじて彼らの宿の一階にあるレストランに落ち着くことができた。それは生涯最高の昼食だったといっていい。安いランチセットを皆で食べながら、ペンローズ・タイルにしたがった都市と建築の実現について、震源であるペンローズ氏本人を前にして私たちは語り合ったのである。写真はその昼食直後の写真である。（左から Chris Kling, Roger Penrose, Chris Palmer。撮影筆者）

Aurodyn も完成し、世に問う段階に入っていたと思う。
以前贈った図面の返礼だったのだろうか、Aurodyn の株券を持たないかと勧めてくれたこともあった。手続きが面倒そうだったので遠慮したが。

本号の Chris Palmer さんの投稿にあるように、去る 7 月 Banff で開かれた Bridges 国際会議では、Chris Kling さんを偲び、大勢の手でゾムツールの巨大な構造物を作ったようである。大局的には菱形三十面体の骨格で、Goetheanum3 の基本構造と同様である。自重は相当なものだと思うのだが、まったく変形を起こしていないことに驚きを禁じえない。なんとも幾何学者たちならではの追悼の仕方である。Chris Kling も天国で微笑んでいることだろう。

心からご冥福をお祈りいたします

日詰明男

Real Tornado

Akio Hizume, Yoshikazu Yamagishi
Department of Applied Mathematics and Informatics
Ryukoku University
Seta, Otsu, Shiga, Japan

E-mail: akio@starcage.org
yg@rins.ryukoku.ac.jp

Abstract

The continued fraction expansion of a real number $R > 0$ generates a family of spiral triangular patterns, called "tornadoes." Each tornado consists of similar triangles, any two of which are non-congruent.

Basic Operation

Let $R > 0$ and $0 < s < 1$. In the plane, the sequence of points $V(j) = (s^j \cos 2\pi jR, s^j \sin 2\pi jR)$ for $j = 0,1,\cdots$, which we call the 'vertices', naturally converges to the origin. Fix an integer $k > 0$, which is called the 'modulo' or the 'step size', and join the vertex $V(j)$ with $V(j+k)$ by the line segment $\overline{V(j)V(j+k)}$ for $j \geq 0$.

Fibonacci Tornado

The Fibonacci numbers f_n are defined by $f_1 = f_2 = 1$ and $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, $n > 2$. In the previous paper [2], we showed that if $k = f_{n-1}$ and $R = \tau$, where $\tau = (1+\sqrt{5})/2$ is the golden ratio, there exists a $0 < s < 1$ such that the vertex $V(j + f_{n+2})$ lands on the line segment $\overline{V(j + f_{n+1})V(j + f_n)}$ for each $j \geq 0$. By the Basic Operation above, we obtain the spiral pattern of similar triangles as shown in Figure 1 ($k = 2$), which is called a "tornado". As k gets larger, we could see that the tornado comes out like a blooming flower, while the argument jR of each vertex $V(j)$ remains unchanged.

Remark that the well-known spirals as in Figure 2 are different from our tornadoes because they have congruent triangles.

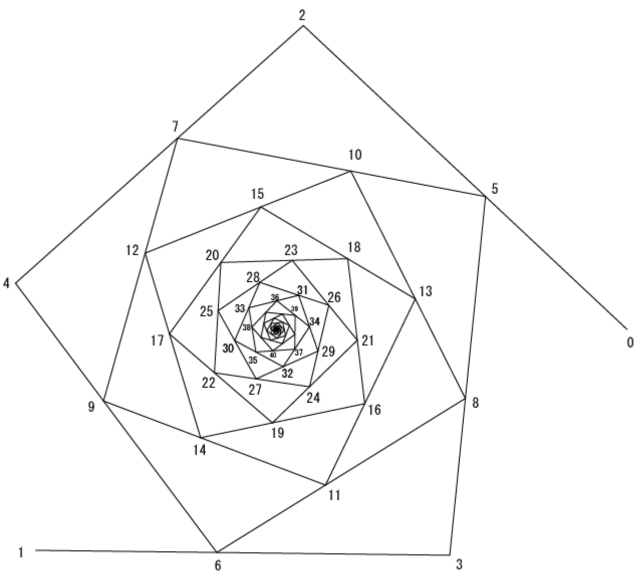


Figure 1: *Fibonacci Tornado.* $[\tau,3,5]$

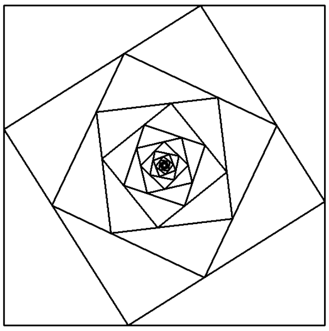


Figure 2 : *A Non-Fibonacci Tornado.*

$$R = C_0 + \cfrac{1}{C_1 + \cfrac{1}{C_2 + \cfrac{1}{C_3 + \cfrac{1}{\ddots \; C_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

p_0/q_0	0th convergent
p_1/q_1	1st convergent
p_2/q_2	2nd convergent
p_3/q_3	3rd convergent
p_n/q_n	n-th convergent

Figure 3 : *Continued Fraction and Convergents*

Real Tornado

A generic real number R also generates a family of tornadoes. As is well-known (see [1]), the continued fraction expansion of R as in the Figure 3 is defined by $R = C_0 + \varepsilon_0$, $0 \le \varepsilon_0 < 1$, and $1/\varepsilon_n = C_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$, $0 \le \varepsilon_{n+1} < 1$ for $n \ge 0$, where C_n are called the partial denominators. If R is rational, it is related to the Euclidean algorithm and stops when $\varepsilon_n = 0$. The n-th convergent p_n / q_n is defined by $p_0 = C_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = C_1 p_0 + 1$, $q_1 = C_1$, and $p_{n+1} = C_{n+1} p_n + p_{n-1}$, $q_{n+1} = C_{n+1} q_n + q_{n-1}$ for $n > 0$. It is known that p_n / q_n are the best approximations of R, where

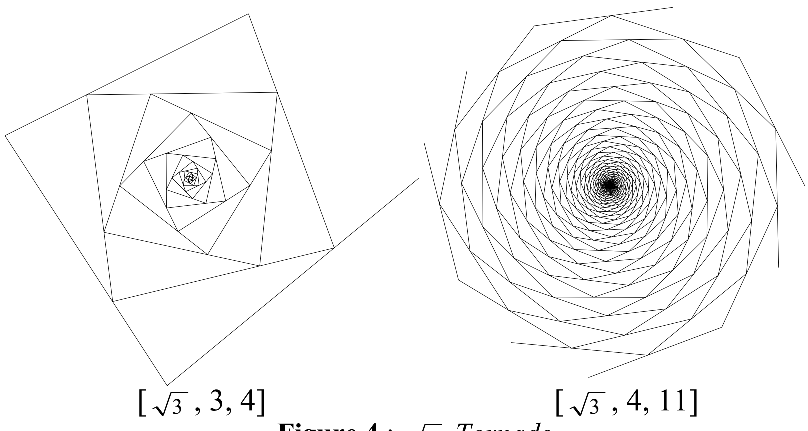
$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots < R < \cdots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}, \text{ and } \left|\frac{p_n}{q_n} - R\right| > \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - R\right| \text{ for } n \ge 0.$$

For example, the convergents of $R = \sqrt{3}$ are 1/1, 2/1, 5/3, 7/4, 19/11, 26/15, 71/41, ... The denominators q_n and q_{n+1} are coprime.

Choose any pair of consecutive convergents p_n / q_n and p_{n+1} / q_{n+1}, and denote by $q = q_n$ and $q' = q_{n+1}$. Define the step size by $k = q' - q$. Then there exists a unique $0 < s < 1$ such that under the Basic Operation the vertex $V(j+q+q')$ lands on the segment $\overline{V(j+q)V(j+q')}$ and we obtain a spiral pattern named as the tornado $[R, q, q']$, consisting of similar triangles $T_j = \Delta V(j)V(j+q)V(j+q')$ for $j \ge 0$. Figure 4 presents the tornadoes $[R, q, q'] = [\sqrt{3}, 3, 4]$ and $[\sqrt{3}, 4, 11]$.

The basic idea of the Real Tornado was originally published in Japanese in [3]. Here we show how to find a $0 < s < 1$. Denote the length of the three edges of T_j by

$$a(j) = \left|V(j+q)V(j+q')\right|,$$
$$b(j) = \left|V(j)V(j+q)\right|,$$
$$c(j) = \left|V(j)V(j+q')\right|.$$



$[\sqrt{3}, 3, 4]$ $[\sqrt{3}, 4, 11]$

Figure 4 : $\sqrt{3}$ *Tornado.*

By Figure 5 we can see that

$$
\begin{aligned}
&a(j)\\
&=\left|V(j+q)V(j+q')\right|\\
&=\left|V(j+q)V(j+q+q')\right|+\left|V(j+q+q')V(j+q')\right|\\
&=s^{q}\left|V(j)V(j+q')\right|+s^{q'}\left|V(j)V(j+q)\right|\\
&=s^{q}c(j)+s^{q+k}b(j).
\end{aligned}
$$

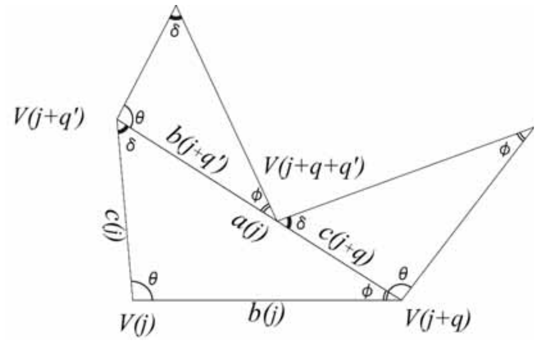


Figure 5 : *Principle.*

The three angles of T_j are

$\phi = 2\pi Rq' = 2\pi R(q+k)$, $\delta = -2\pi Rq$, and $\theta = 2\pi Rk$

or

$\phi = -2\pi Rq' = -2\pi R(q+k)$, $\delta = 2\pi Rq$, and $\theta = -2\pi Rk$,

where the signs are chosen to satisfy that $\sin\phi, \sin\delta$ and $\sin\theta$ are all positive. The law of sines is expressed by

$$\frac{a(j)}{\sin\theta}=\frac{b(j)}{\sin\delta}=\frac{c(j)}{\sin\phi},$$

and we obtain the equation

$$s^{q'}\sin(2\pi Rq)-s^{q}\sin(2\pi Rq')+\sin(2\pi Rk)=0\,.$$

It is easy to see that this equation has a unique solution $0<s<1$.

Additional Results

Conversely, we can also prove that any possible tornado $[R,q,q']$ with q,q' positive is related to the continued fraction expansion of R .

Theorem: Let R be a real number and q,q' positive integers. There exists a tornado $[R,q,q']$ if and only if R has a convergent $\frac{p_n}{q_n}$ and an (intermediate) convergent $\frac{cp_n+p_{n-1}}{cq_n+q_{n-1}}$, $0<c\le C_{n+1}$, where we denote by $p=p_n, q=q_n, p'=cp_n+p_{n+1}$ and $q'=cq_n+q_{n+1}$, such that

(1) R is distinct from $\frac{p}{q}$ and $\frac{p'}{q'}$, that is, $\frac{p}{q}<R<\frac{p'}{q'}$ or $\frac{p'}{q'}<R<\frac{p}{q}$, and

(2) $\left|\{qR\}-\{q'R\}\right|>1/2$, where $0\le\{x\}=x-\left[x\right]<1$ denotes the fractional part.

See [4] for the proof and further discussions. Note that the golden ratio τ is a special irrational number which has no intermediate convergents.

Acknowledgements

The authors would like to thank the reviewers for their helpful comments and suggestions. They suggested to consider the equation $z^{q+k}=\alpha z^{k}+(1-\alpha)$ with $0<\alpha<1$ given, where q and k are relatively prime. By experiments, they claim that the tornado $[R,q,q+k]$ is obtained by using the root

$z = se^{2\pi i R} \neq 1$ of the largest magnitude. Note that in our setting above, the ratio α tends to 0 or 1 as R approaches to p/q or p'/q' respectively.

References

[1] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, fifth edition, Oxford, 1979.
[2] Akio Hizume, *Real Tornado*, MANIFOLD #17, pp. 8-11. 2008. (in Japanese)
[3] Akio Hizume, *Fibonacci Tornado*, Bridges Proceedings, pp. 485-486. 2008.
[4] Akio Hizume and Yoshikazu Yamagishi, *Monohedral similarity tilings*, in preparation.

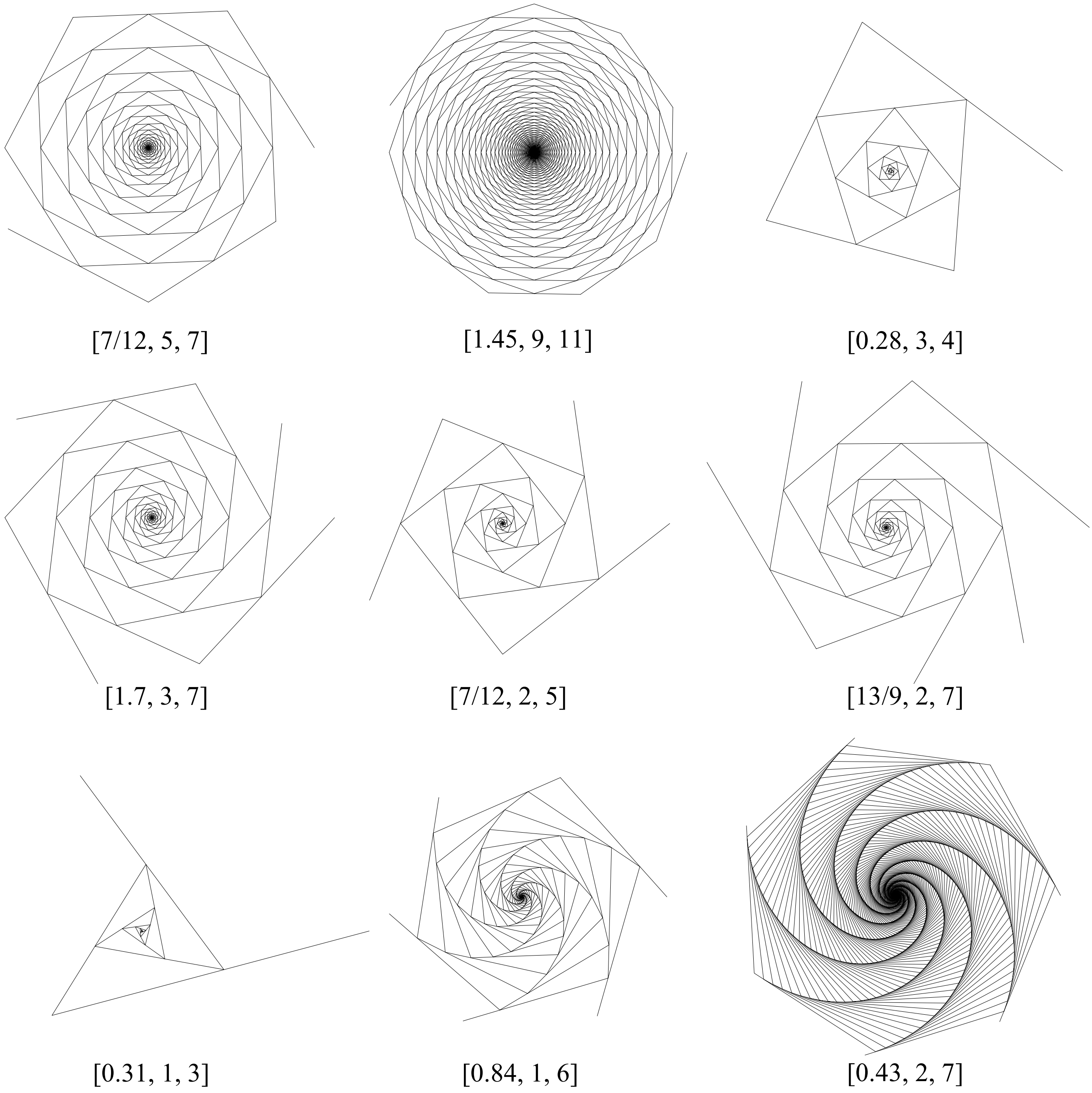


Figure 6 : *Real Tornado Samples.*

 Received 13th Sept. 2009

Fibonacci Tornado の折り紙展開図

龍谷大学大学院　理工学研究科
修士課程　数理情報学専攻
T09M007 須志田　隆道
t09m007@mail.ryukoku.ac.jp

1.　　Fibonacci Tornado の折り紙展開図

Fibonacci Tornado は日詰明男氏によって作られたものであり，全て相似な三角形で構成されるタイリングである。特に図１，２ののものは mod2 の Fibonacci Tornado，mod3 の Fibonacci Tornado と呼ばれている。この２つの Fibonacci Tornado については日詰氏によって折り紙展開図が１つずつ存在している事がわかっている。折り紙展開図とは，[1]と[2]において「ねじれ多重塔」として紹介されており，[3]において Fibonacci Tornado の折り紙展開図が紹介されている。ここでは，[3]に紹介された mod2 の Fibonacci Tornado の折り紙展開図について，１つの Fibonacci Tornado に折り紙展開図が１つしか存在していないのかどうかという事を考えた。

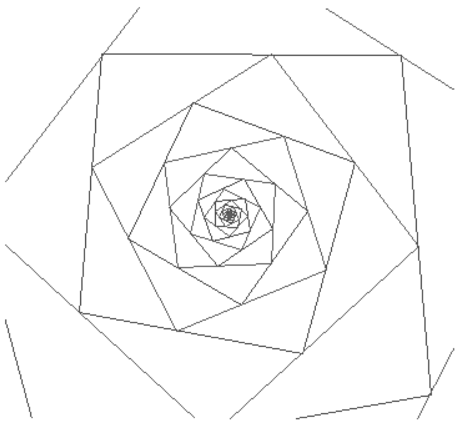


図１：mod2 の Fibonacci Tornado

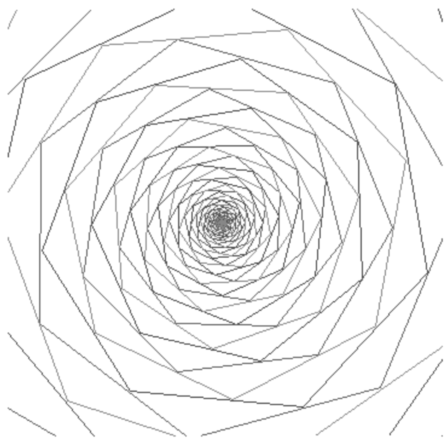


図２：mod3 の Fibonacci Tornado

まず，mod2 の Fibonacci Tornado の折り紙展開図を作るにあたってどのようなことを扱うかを紹介する。ここでは，相似な三角形タイリングを構成するために複素数の点列を扱う。基本となる複素数は，$z = re^{2\pi i\theta}$ であり，点列 $\{z^j; j$は整数$\}$ を用いる。θ は Fibonacci Tornado であるため，黄金比の小数部分となる。折り紙展開図は紙を折り込む事で三角形タイルを作るものなので，基本的には図３のように，折り込むことを考える。

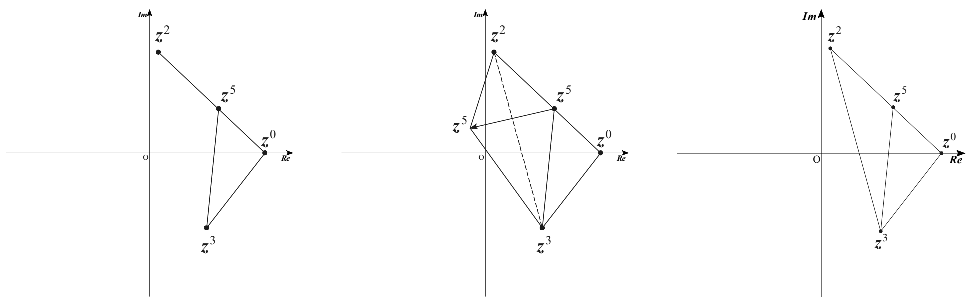


図３：折り込む事で三角形タイルを作る

図３の左側の図の三角形を折り込む事で作るには，図３の中央の図のように，合同な三角形を作り，図３の右側の図形のように，四角形のタイルを折り込んで作る事ができる。この考え方で折り紙展開図を作る事ができるが，タイリングを構成するにはこのを非常にたくさんの四角形タイルが必要になり，手作業では折り紙展開図を構成する事が困難になるなので，上記にも記したように複素数を用い，さらに不動点（相似の中心）を考える事で図４のような日詰氏の折り紙展開図を簡単に構成できた。

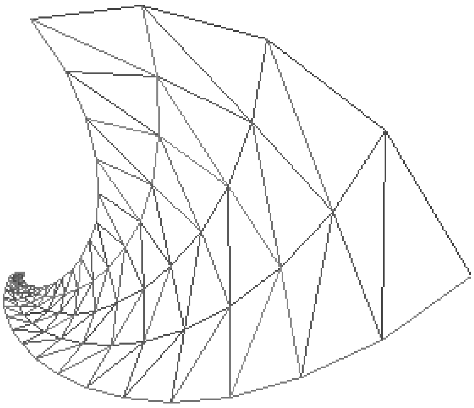


図４：mod2 の Fibonacci Tornado の折り紙展開図（[3]と同様の折り紙展開図）

複素数を用いる事で，この四角形タイルをタイリングとしたとき，複素平面上を覆う事がわかったので，日詰氏による折り紙展開図の別の取り方として，図５のような折り紙展開図が存在している事がわかった。

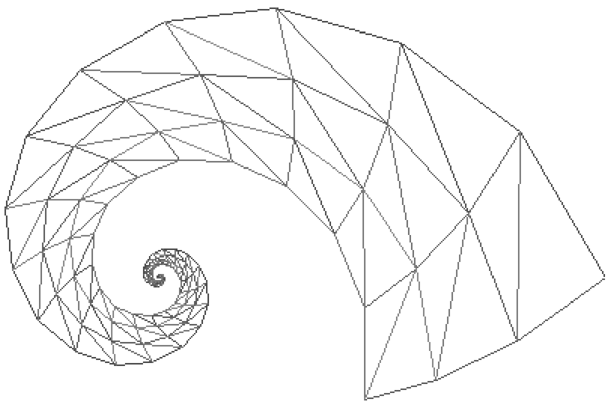


図５：mod2 の Fibonacci Tornado の折り紙展開図(１)

このアイデア以外にここで重要視したい事は，折り込む事で三角形タイルを作る四角形タイルは折り込む事で三角形タイルができるのであれば，mod2 の Fibonacci Tornado から選んできてもよいという事である。そのようにして考えられた事が図６の四角形タイルである。日詰氏の四角形タイルが mod2，step3 であるとすれば，図６は mod2，step5 になっています。（mod と step は下記の折り紙展開図のページにて，四角形タイルを紹介する際に記述しておく。）

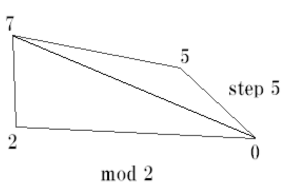


図６：mod2，step5 の四角形タイル

この四角形タイルによって構成される mod2 の Fibonacci Tornado の折り紙展開図は図７のようになる。

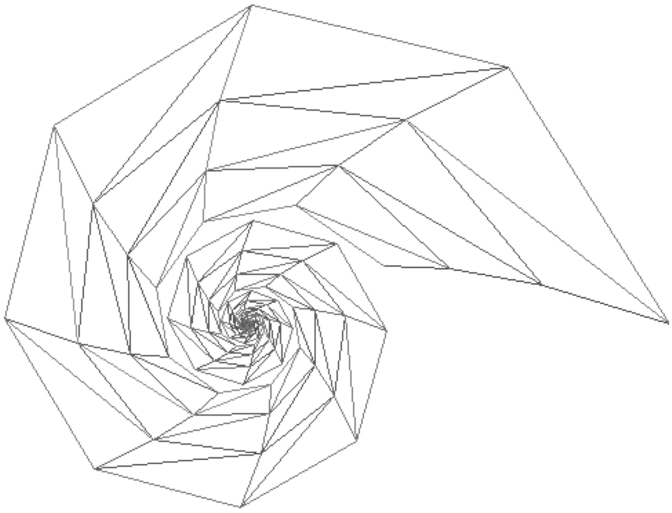


図７：mod2 の Fibonacci Tornado の折り紙展開図(２)

さらに，日詰氏のものでもあったように，この四角形タイルがタイリングであれば複素平面上を覆う事になるので，図８のような折り紙展開図を考える事ができる。

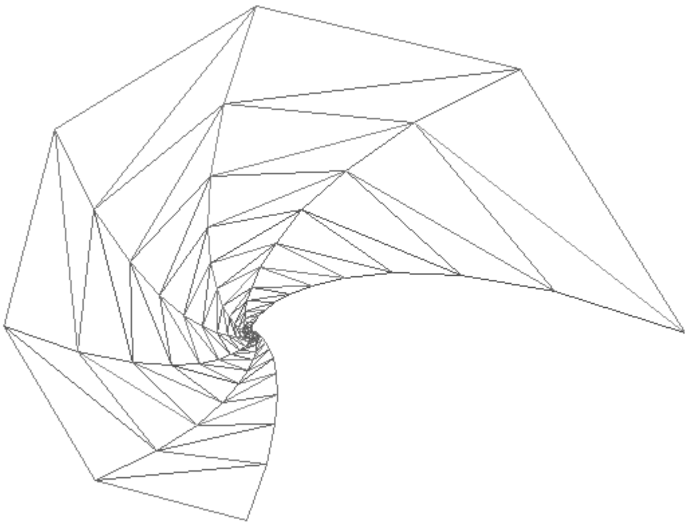


図８：mod2 の Fibonacci Tornado の折り紙展開図(３)

mod2 の Fibonacci Tornado についての折り紙展開図はこの４つだけであるかどうかはまだわかってはいないが，この複素数の点列によって四角形タイルを構成する事で色々な折り紙展開図を考える事ができるという事が予想されます。また，[4]における「Real Tornado」の折り紙展開図というものが存在しているかどうかが課題として挙げられます。

参考文献：

[1] 布施知子「ねじれ多重塔」　MANIFOLD #05 Jul.2002. P.3～P.5.
[2] 布施知子「続：ねじれ多重塔」　MANIFOLD #12 Feb.2006. P.3～P.8.
[3] 日詰明男「相似三角形で構成される葉序パターン」　MANIFOLD #11 Aug.2005. P.7～P.11.
[4] 日詰明男「Real Tornado」　MANIFOLD #16 Jan.2008. P.8～P.11.

FIBONACCI TORNADO in ORIGAMI mod2

Takamichi Sushida / Akio Hizume (2009)

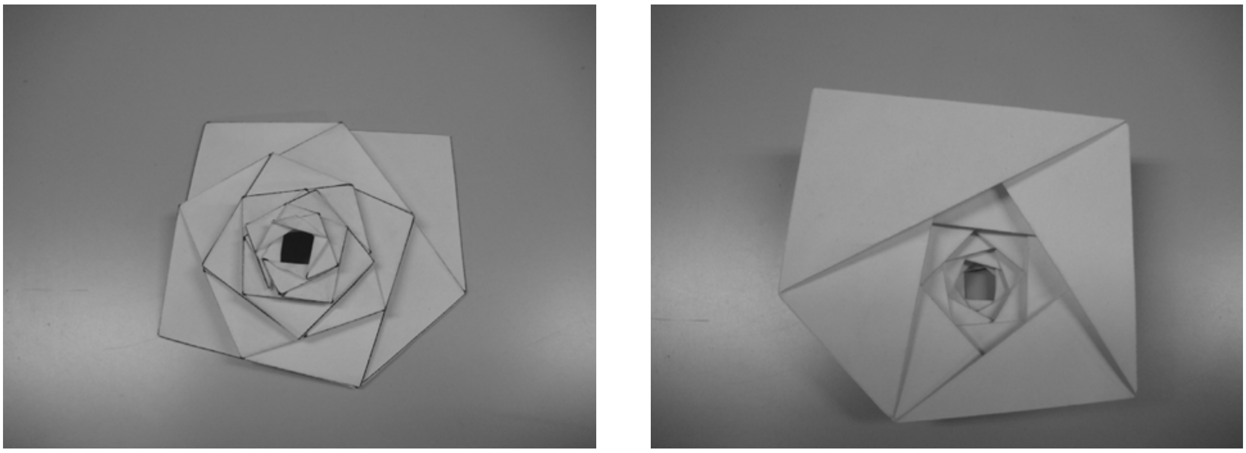


図９：折り紙展開図を折り込んだもの（折り込みは展開図の途中まで）

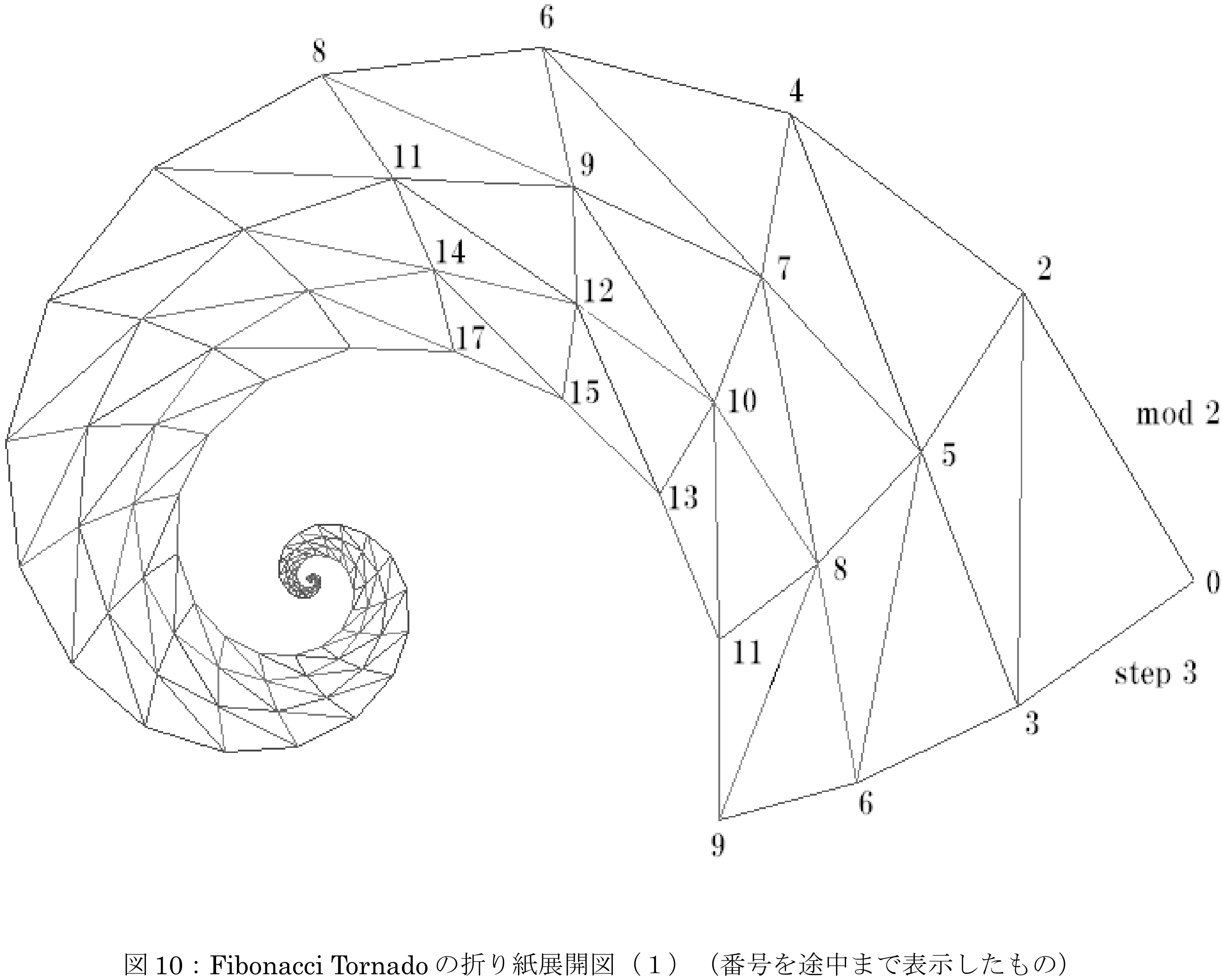
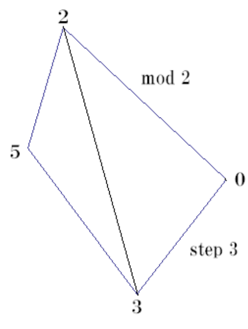


図 10：Fibonacci Tornado の折り紙展開図（１）（番号を途中まで表示したもの）

図 10 は mod2，step3 の折り紙展開図である。タイルを一つ取り出すと，右図のようになり，mod と step は四角形の縦と横の番号の取り方である。折るときに，対角線は谷折り，それ以外は山折りにしていく。



FIBONACCI TORNADO in ORIGAMI mod2

Takamichi Sushida / Akio Hizume (2009)

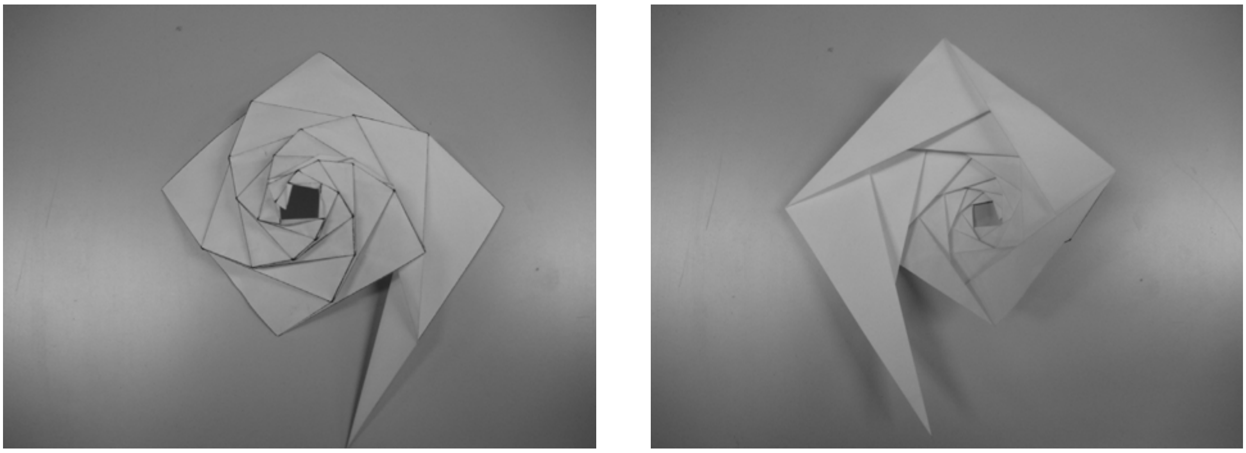


図 11：折り紙展開図を折り込んだもの（折り込みは展開図の途中まで）

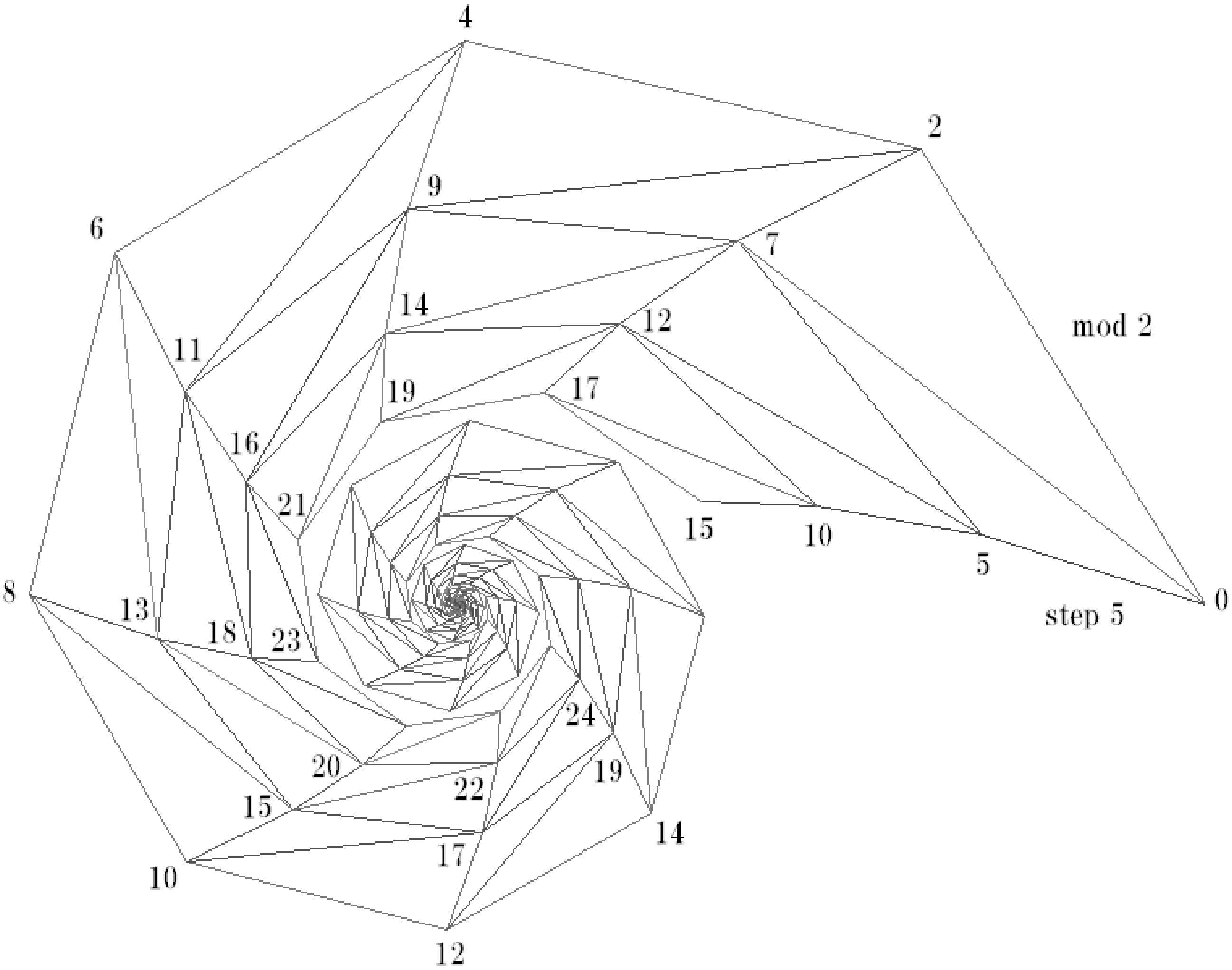
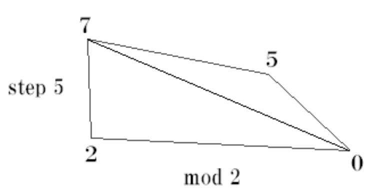


図 12：Fibonacci Tornado の折り紙展開図（２）（番号を途中まで表示したもの）

図 12 は mod2，step ５の折り紙展開図である。タイルを一つ取り出すと，右図のようになり，mod と step は四角形の縦と横の番号の取り方である。折るときに，対角線は谷折り，それ以外は山折りにしていく。



FIBONACCI TORNADO in ORIGAMI mod2

Takamichi Sushida / Akio Hizume (2009)

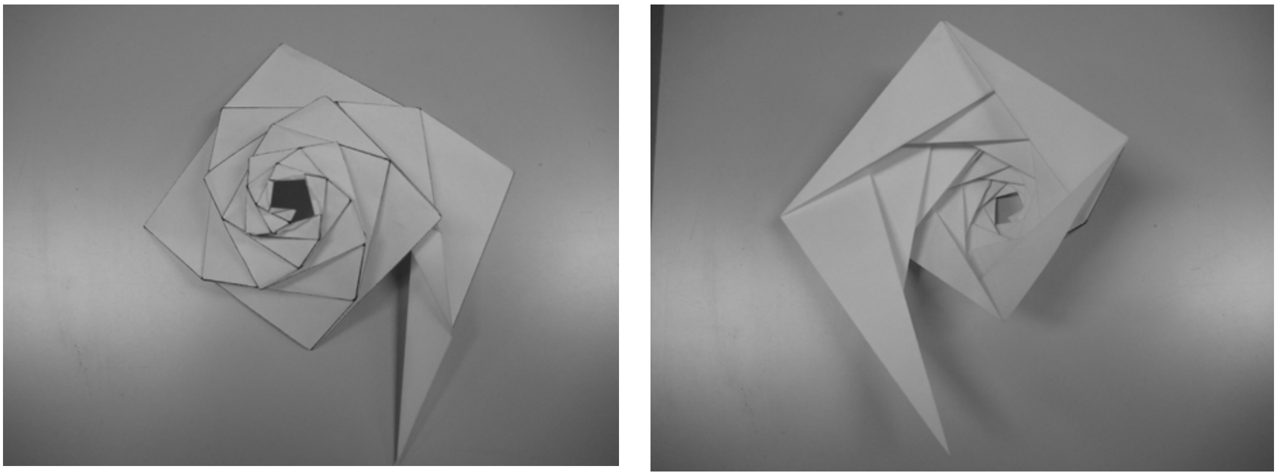


図 13：折り紙展開図を折り込んだもの（折り込みは展開図の途中まで）

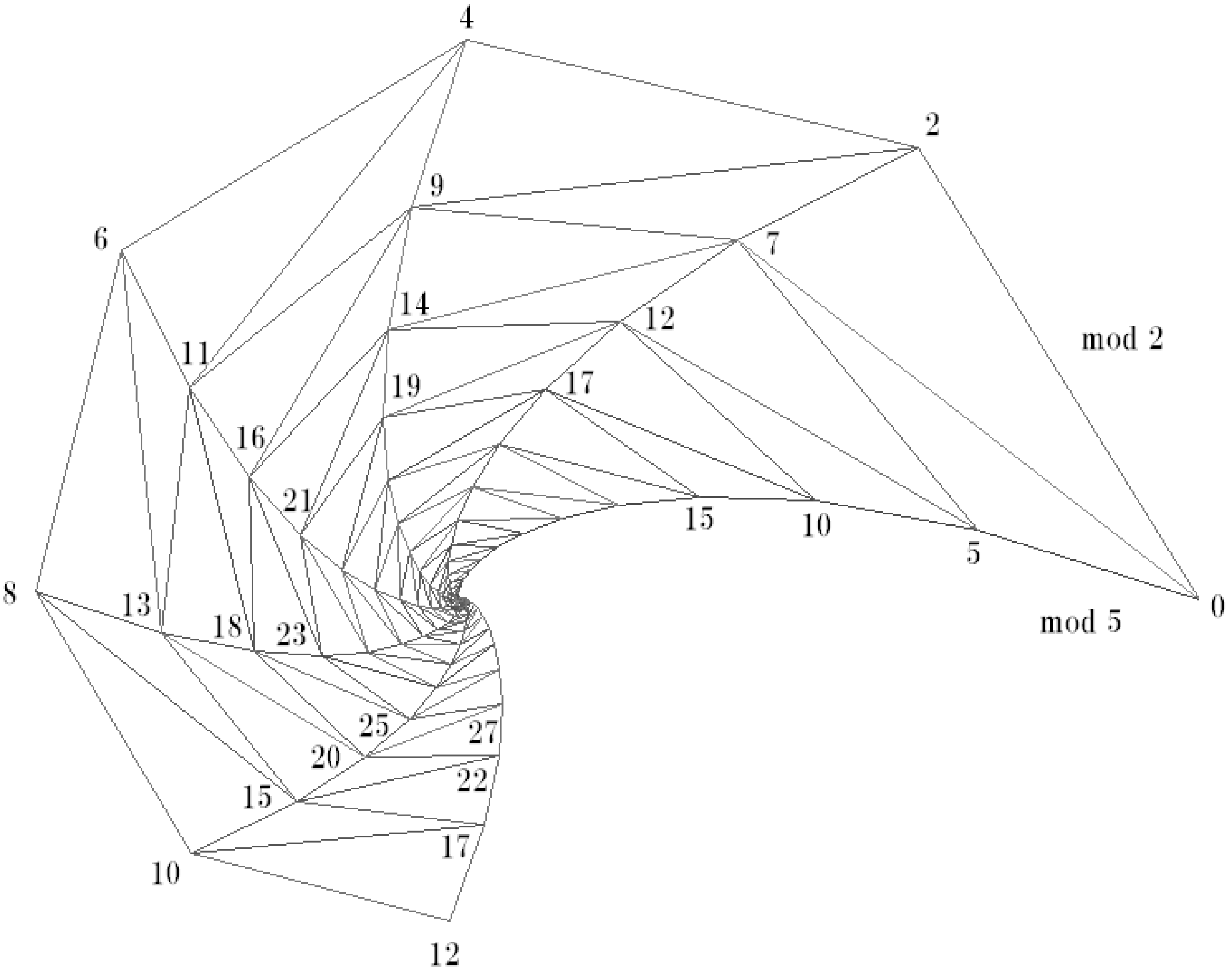
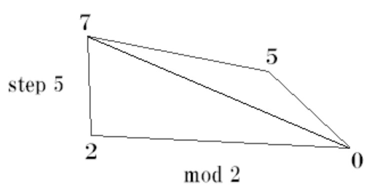


図 14：Fibonacci Tornado の折り紙展開図（３）（番号を途中まで表示したもの）

図 14 は mod2，step ５の折り紙展開図である。タイルを一つ取り出すと，右図のようになり，mod と step は四角形の縦と横の番号の取り方である。図 12 のものと同じタイルになる。折るときに，対角線は谷折り，それ以外は山折りにしていく。



ペンローズ・タイルの意外な効果

日詰明男

本号表紙図案“ Penrose Tile made of plywood”参照

Phot by Tomoko Ninomiya

「ペンローズ・タイル状の都市計画や建築はいつか人類の終の棲家になるだろう。これは数学的必然である」と私は常々発言しているが、「五角形は不経済だ」と反論されることもしばしばである。「長方形から五角形を取るのは無駄が多いではないか」と。

ところが、実際はほとんど無駄がないどころか、おまけに直角システムや三角システムではありえないような効果さえ付いてくる。

Phot by Ayako Okada

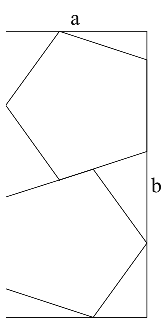
2005 年に、東京丸の内ビル（通称丸ビル）で行った展示（上および左写真）では、厚さ 30 ミリの 3×6 板 37 枚から部材を切り出し、直径約 8mの面積をペンローズ・タイルで敷き詰めた。

本号表紙は、その平面図である。コンパネ規格（3×6 板）から正五角形タイル 2 枚と二等辺三角形、直角三角形がとれ、すべて活用することができる。正確には、

τ を黄金比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ として

$$a : b = 1 : \frac{(7\tau+5)\sqrt{4\tau+3}}{11\tau+7} = 1 : 2.02622131\cdots$$

の長方形から無駄なく取れる。



1800mm×888.3531086mm の板に相当するから、3×6 板の場合、長辺側を 11.6mm ほど削らねばならない。

この展示に使われたタイル材は、厚さ 30 ミリの場合、180×90×111cm の直方体空間に収納でき、家庭の押し入れに余裕で入る。実際に丸ビル・プロジェクトが終わった後 2 年間保管し、下写真にあるように、2008 年 8 月、京都芸術センターで再展示した。

Photo by Tomas Svab

このときは経費節約のため、タイル同士を緊結せず、そのまま並べるだけにとどめた。

驚くべきことに、並べきった段階で、足の爪先で周辺をトントンと叩くと、自然に中心部は隙間なく詰まってゆき、びくともしないタイルとなったのである。

1 ヶ月の会期中、大勢の観客が歩き回ったにもかかわらず、殆どずれることはなかった。

これは準結晶の物性を予言する現象かもしれない。

もし四角格子や三角格子の“ 周期的” タイルだったとすると、接着無しでは、ずれまくって収拾がつかなくなったことだろう。いわゆる「格子欠陥」が簡単に起こってしまうからである。

現在は再び自宅倉庫にコンパクトにまとめ、次の出番を待っている状態である。　（了）

中間近似分数をめぐって

日詰明男

MANIFOLD #17(2008)掲載論文「Real Tornado」を 2009 年 Bridges 国際会議に投稿すべく英語論文にまとめる作業を龍谷大学の山岸和義さんとすすめていたところ、新しい事実が次々と見つかり、共同研究に発展した。その過程で、私は「中間近似分数」の存在を知った。（橋本竜太「実数の有理数近似と連分数展開」に詳しい）

$$R = C_0 + \cfrac{1}{C_1 + \cfrac{1}{C_2 + \cfrac{1}{C_3 + \cfrac{1}{\ddots\, C_k + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

p_0/q_0	0 次　主近似分数
p_1/q_1	1 次　主近似分数
p_2/q_2	2 次　主近似分数
p_3/q_3	3 次　主近似分数
p_k/q_k	k 次　主近似分数

今実数が、上図のような連分数 $[C_0, C_1, C_2, C_3, \dots, C_k, \dots]$ で表されたとする。C_0 から C_k までの連分数を計算した有理数を「k 次主近似分数」という。

$C_{k+1} \geq 2$ のとき、k 次主近似分数と(k+1)次主近似分数の間に $(C_{k+1}-1)$ 個の「k 次中間近似分数」が存在する。近似の良さは以下のように表される。

$$\left|\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}-R\right| > \left|\frac{p_k+p_{k-1}}{q_k+q_{k-1}}-R\right| > \left|\frac{2p_k+p_{k-1}}{2q_k+q_{k-1}}-R\right| > \dots > \left|\frac{(C_{k+1}-1)p_k+p_{k-1}}{(C_{k+1}-1)q_k+q_{k-1}}-R\right| > \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}-R\right|$$

k-1 次主　　k 次中間#1　　k 次中間#2　　…　　k 次中間# $(C_{k+1}-1)$　　k+1 次主

「最良近似分数」というものもあり、主近似分数ならば最良近似分数だが、その逆は必ずしも成り立たない。詳しくは橋本論文を参照。

部分分母 C が常に 1、すなわち[1,1,1,1,⋯]で表記される黄金比には、言うまでもなく中間近似分数は存在しない。

前論文「Real Tornado」は隣接する主近似分数分母 q_k, q_{k+1} で構成され、$[R, q_k, q_{k+1}]$ という指標で代表させた。

新たな事実として、中間近似分数分母 q'_k を含めた $[R, q_k, q'_k]$ もまた Tornado を構成することが分かっている。（Akio Hizume and Yoshikazu Yamagishi, Real Tornado, Bridges 2009 Conference Proceedings）

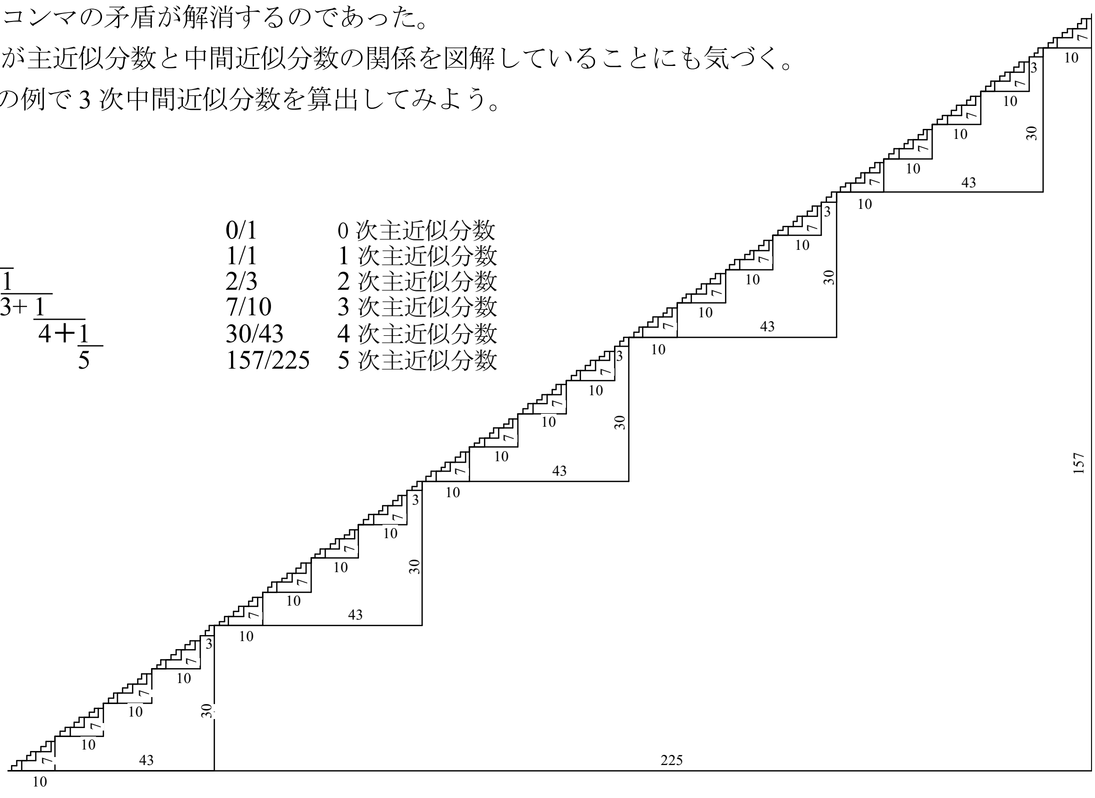
さて「実数の音楽」(Akio Hizume, MANIFOLD #03, 2001)では、連分数展開の自己相似構造を入れ子状の直角三角形で表現した。下図は連分数展開が[0,1,2,3,4,5]となる値 157/225 の例である。この図をリズムや音階、音色に反映させ、新しい音楽理論を構築した。特に音階や音色のスペクトル分布として解釈すると、音響学における数千年の懸案となっていたピタゴラス・コンマの矛盾が解消するのであった。

そして今や、この図形が主近似分数と中間近似分数の関係を図解していることにも気づく。

たとえば図の 157/225 の例で 3 次中間近似分数を算出してみよう。

$$\frac{157}{225} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}}}$$

0/1	0 次主近似分数
1/1	1 次主近似分数
2/3	2 次主近似分数
7/10	3 次主近似分数
30/43	4 次主近似分数
157/225	5 次主近似分数



第(3+1)次部分分母 C_4= 4 であるから、第 3 次中間近似分数は第 3 次主近似分数 7/10 と第 4 次主近似分数 30/43 の間に 4-1=3 個存在する。それらは以下のとおりである。

第3次中間近似分数#1: $\frac{7+2}{10+3}=\frac{9}{13}$　　図において#0#1 を斜辺とする直角三角形

第3次中間近似分数#2: $\frac{7*2+2}{10*2+3}=\frac{16}{23}$　　図において#0#2 を斜辺とする直角三角形

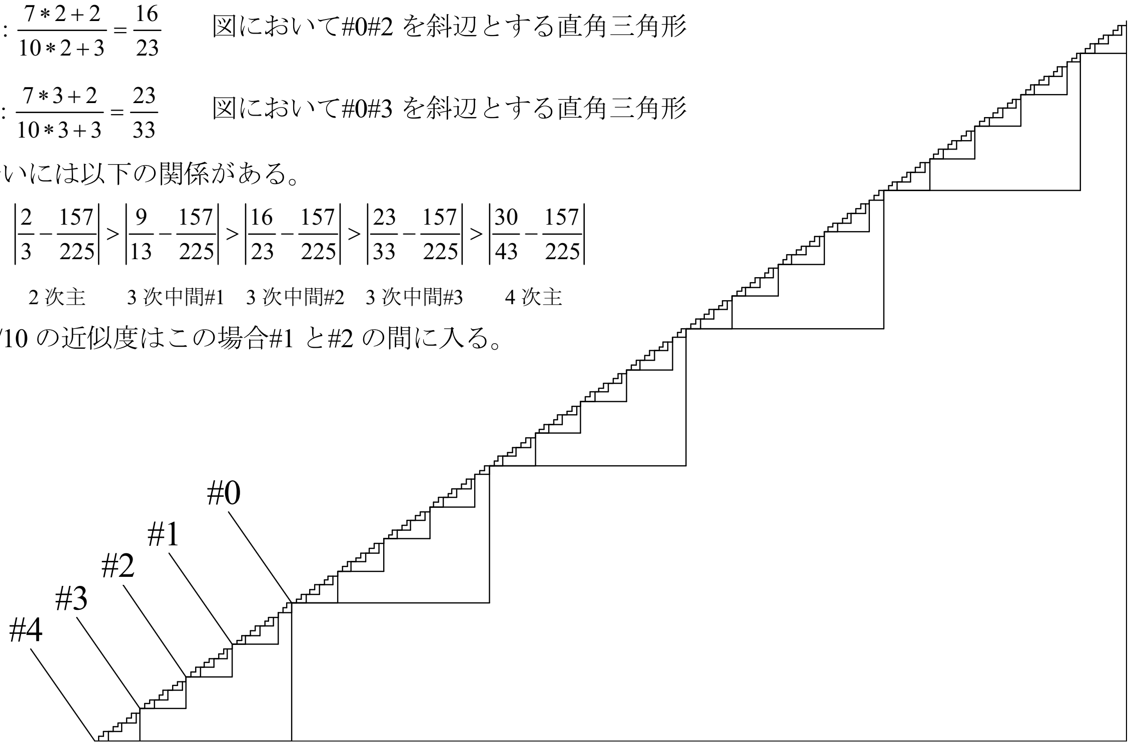
第3次中間近似分数#3: $\frac{7*3+2}{10*3+3}=\frac{23}{33}$　　図において#0#3 を斜辺とする直角三角形

これらの近似の度合いには以下の関係がある。

$$\left|\frac{2}{3}-\frac{157}{225}\right|>\left|\frac{9}{13}-\frac{157}{225}\right|>\left|\frac{16}{23}-\frac{157}{225}\right|>\left|\frac{23}{33}-\frac{157}{225}\right|>\left|\frac{30}{43}-\frac{157}{225}\right|$$

2 次主　3 次中間#1　3 次中間#2　3 次中間#3　4 次主

第 3 次主近似分数 7/10 の近似度はこの場合#1 と#2 の間に入る。



以上のような中間近似分数の知識から、実数ケチャック・ワークショップの楽譜（日詰明男「音楽の建築」P.32-33）は以下のように改良せねばならない。斜体字のリズム・パターンが中間近似分数に対応する。これを「中間ケチャック」と呼ぼう。従来の主近似分数に対応するものは「主ケチャック」と呼ぶことにしよう。
従来、スクエア・ケチャックは多パート化しにくかったが、これでスクエアも大編成で演奏可能になった。

●スクエア・ケチャック　SQUARE KECAK　√2-1　[0,2,2,2,2,2,…]　0.41421356…

1/0　ケ

0/1　タ

1/1　タケ

1/2　タタケ　叩け

1/3　タタタケ　田叩け

2/5　タタタケタタケ　田叩け叩け

3/7　タタタケタタケ　タタケ　田叩け叩け 叩け

5/12　タタタケタタケ タタタケタタケ タタケ　田叩け叩け 田叩け叩け 叩け

7/17 タタタケタタケ タタタケタタケ タタタケタタケ タタケ　田叩け叩け 田叩け叩け 田叩け叩け 叩け

12/29 タタタケタタケ タタタケタタケ タタタケタタケ タタケ タタタケタタケ タタタケタタケ タタケ
田叩け叩け 田叩け叩け 田叩け叩け 叩け 田叩け叩け 田叩け叩け 叩け

以下同様

●デルタ・ケチャック　DELTA KECAK　√3-1　[0,1,2,1,2,1,2,1,2,…]　0.7320508…

1/0　ケ

0/1　タ

1/1　タケ　竹

1/2　*タタケ*　*叩け*

2/3　タタケタケ　叩け竹

3/4　タタケタケタケ　叩け竹竹

5/7　*タタケタケタケ タタケタケ*　*叩け竹竹 叩け竹*

8/11　タタケタケタケ タタケタケタケ タタケタケ　叩け竹竹 叩け竹竹 叩け竹

11/15　タタケタケタケ タタケタケタケ タタケタケタケ タタケタケ　叩け竹竹 叩け竹竹 叩け竹竹 叩け竹

19/26　*タタケタケタケ タタケタケタケ タタケタケタケ タタケタケ*
タタケタケタケ タタケタケタケ タタケタケ
叩け竹竹 叩け竹竹 叩け竹竹 叩け竹　叩け竹竹 叩け竹竹 叩け竹

30/41　タタケタケタケ タタケタケタケ タタケタケタケ タタケタケ
タタケタケタケ タタケタケタケ タタケタケタケ タタケタケ
タタケタケタケ タタケタケタケ タタケタケ
叩け竹竹 叩け竹竹 叩け竹竹 叩け竹　叩け竹竹 叩け竹竹 叩け竹竹 叩け竹　叩け竹竹 叩け竹竹 叩け竹

以下同様

紙面が余ったので、ついでに楽譜をいくつか追加しよう。

●オイラー・ケチャック　EULER KECAK　EXP(1)-2　[0,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,…]　0.71828…

1/0　ケ

0/1　タ

1/1　タケ

1/2　*タタケ*

2/3　タタケタケ

3/4　タタケタケタケ

5/7　タタケタケタケ タタケタケ

8/11　*タタケタケタケ タタケタケタケ タタケタケ*

13/18　*タタケタケタケ タタケタケタケ タタケタケ タタケタケタケ タタケタケ*

18/25　*タタケタケタケ タタケタケタケ タタケタケ タタケタケタケ タタケタケ タタケタケタケ タタケタケ*

23/32　タタケタケタケ タタケタケタケ タタケタケ タタケタケタケ タタケタケ タタケタケタケ タタケタケ
タタケタケタケ タタケタケ

28/39　タタケタケタケ タタケタケタケ タタケタケ タタケタケタケ タタケタケ タタケタケタケ タタケタケ
タタケタケタケ タタケタケ タタケタケタケ タタケタケ

以下同様

●セブン・ケチャック　SEVEN KECAK　√7-2　[0,1,1,1,4,1,1,1,4,1,1,1,⋯]　0.645751311⋯

1/0　**ケ**

0/1　**タ**

1/1　**タケ**

1/2　**タタケ**

2/3　**タタケタケ**

3/5　*タタケ タタケタケ*

5/8　*タタケ タタケタケ タタケタケ*

7/11　*タタケ タタケタケ タタケタケ タタケタケ*

9/14　**タタケ タタケタケ タタケタケ タタケタケ タタケタケ**

11/17　**タタケ タタケタケ タタケタケ タタケタケ タタケタケ タタケタケ**

20/31　**タタケ タタケタケ タタケタケ タタケタケ タタケタケ タタケタケ**
タタケ タタケタケ タタケタケ タタケタケ タタケタケ

以下同様

●イレブン・ケチャック ELEVEN KECAK　√11-3　[0,3,6,3,6,3,⋯]　0.31662479⋯

1/0　**ケ**

0/1　**タ**

1/1　*タケ*

1/2　*タタケ*

1/3　**タタタケ**

1/4　*タタタタケ*

2/7　*タタタタケ タタタケ*

3/10　*タタタタケ タタタケ タタタケ*

4/13　*タタタタケ タタタケ タタタケ タタタケ*

5/16　*タタタタケ タタタケ タタタケ タタタケ タタタケ*

6/19　**タタタタケ タタタケ タタタケ タタタケ タタタケ タタタケ**

7/22　*タタタタケ タタタケ タタタケ タタタケ タタタケ タタタケ タタタケ*

13/41　*タタタタケ タタタケ タタタケ タタタケ タタタケ タタタケ*
タタタタケ タタタケ タタタケ タタタケ タタタケ タタタケ タタタケ

19/60　**タタタタケ タタタケ タタタケ タタタケ タタタケ タタタケ**
タタタタケ タタタケ タタタケ タタタケ タタタケ タタタケ
タタタタケ タタタケ タタタケ タタタケ タタタケ タタタケ タタタケ

以下同様